ψ^* 2020 : TD 4 des 28 et 30 septembre
Continuité

1. $f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \\ \frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$ est-elle prolongeable par continuité ?

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, a un point de E, $f : x \mapsto d(a,x)$.
   Prouver en utilisant la caractérisation séquentielle que f est continue.

3. Soient E et F deux ev de dimension finie, $f : E \to F$ définie sur E.
   Le **graphe** de f est $G = \{\, (x, f(x) \mid x \in E) \,\}$; c'est donc une partie de $E \times F$.

   a. Montrer que si f est continue, alors son graphe est fermé.

   b. Trouver un contre-exemple, avec $E = F = \mathbb{R}$, montrant que la réciproque est fausse.

4. On fixe un entier naturel p ; justifier la continuité de :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^p \end{array} \right.$$
   On pourra commencer par le cas $p = 2$.

5. Déterminer si les parties suivantes de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont ouvertes, fermées, ou ni l'un ni l'autre.

   a. $\mathcal{S} =_{déf} \{\,$matrices symétriques$\,\}$

   b. $\mathcal{O} =_{déf} \left\{\, A \in E \mid A^T A = I \,\right\}$

   c. $\mathcal{V} =_{déf} \left\{\, A \in E \mid \forall k \in [1..n] \ , \ \mathrm{tr}(A^k) > 0 \,\right\}$

   d. $\mathcal{N} = \{\,$matrices nilpotentes$\,\}$

   e. $\mathcal{S}^+ =_{déf} \left\{\, A \in S \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \ , \ X^T A X \geq 0 \,\right\}$

   f. $\mathcal{S}^{++} =_{déf} \left\{\, A \in S \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ , \ X^T A X > 0 \,\right\}$

6. Soient E un ev de dimension finie, A une partie fermée non vide de E, b un point de E.
   On définit $d(b,A) = \inf \{\, d(b,x) \mid x \in A \,\}$.

   a. Cas A borné : montrer que c'est en fait un min.

   b. Montrer que ceci reste vrai même si A n'est pas borné.