# $\psi^*$ 2020 : TD 5 des 5 et 7 octobre
# Continuité, dérivabilité

1. Soit $A$ une partie compacte d'un ev $E$ de dimension finie, et $f$ une application de $A$ dans $A$ vérifiant :
$$\forall (x,y) \in A^2,\ x \neq y \ \Rightarrow\ d\left(f(x), f(y)\right) < d(x,y)$$

   a. En utilisant $g : x \mapsto d(x, f(x))$, montrer que $f$ a au moins un point fixe.

   b. Montrer que le point fixe de $f$ est unique.

2. Soit $E$ un espace euclidien : muni d'un produit scalaire et de la norme euclidienne associée. Soit $F \in \mathcal{C}^2\left([0,b], E\right)$ tel que $F'$ ne s'annule pas.

   a. Montrer que $\varphi : t \mapsto v = \|F'(t)\|$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée ; l'interpréter cinématiquement.

   b. Montrer que $\psi : t \mapsto s = \int_0^t \varphi$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $I = [0,b]$ sur un intervalle $J$ à préciser.

   c. Montrer que $G = F \circ \psi^{-1}$ est $\mathcal{C}^2$ et que $F$ et $G$ ont même trajectoire, ie $F(I) = G(J)$ .

   d. Calculer $\overrightarrow{T} = G'(s)$ et l'interpréter géométriquement.
   Vérifier que pour la loi $G$, la trajectoire est décrite à vitesse constante.

   e. Calculer $G''(s)$ et l'interpréter géométriquement.

3. Erreur d'interpolation de Lagrange.
Soient $I$ un segment de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}\left(I, \mathbb{R}\right)$ , $a_0 \ldots a_n$ des points distincts de $I$, $P$ le polynôme de degré $\leq n$ qui coïncide avec $f$ aux points $a_i$ .

   a. On fixe $x \in I$ distinct des $a_i$. Montrer qu'on peut choisir $k$ tel que :
$$\varphi : t \mapsto f(t) - P(t) - k \prod_{i=0}^{n} (t - a_i)$$
   s'annule en $x$ ; pour ce choix, appliquer Rolle à $\varphi$ et ses dérivées autant de fois que possible.

   b. En déduire que $\left\| f - \widetilde{P} \right\|_\infty \leq M \frac{\left\| D^{n+1} f \right\|_\infty}{(n+1)!}$ , avec $M$ indépendant de $f$ à définir.