ψ^* 2020 : TD 6 des 12 et 14 octobre
Dérivation, courbes paramétrées

1. Erreur d'interpolation de Lagrange.
   Soient I un segment de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a_0 \dots a_n$ des points distincts de I, P le polynôme de degré $\leq n$ qui coïncide avec f aux points a_i , $\widetilde{P}$ la fonction définie par P sur I.

   a. On fixe $x \in I$ distinct des a_i. Trouver un réel k tel que :
   $$\varphi : t \mapsto f(t) - P(t) - k \prod_{i=0}^{n} (t - a_i)$$
   s'annule en x.

   b. Pour ce choix de k, appliquer Rolle à φ et ses dérivées autant de fois que possible.

   c. En déduire que $\left\| f - \widetilde{P} \right\|_\infty \leq M \frac{\|D^{n+1} f\|_\infty}{(n+1)!}$, avec M indépendant de f à définir.

2. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ où x est réel. Montrer que :

   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists H_n \in \mathbb{R}[X]$, $D^n f : x \mapsto H_n(x)\, e^{-x^2}$;

   b. chaque H_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et simple.

3. C est la courbe paramétrée par $(\mathbb{R}, F)$ où :
   $$F : t \mapsto \begin{bmatrix} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = tx \end{bmatrix}$$

   a. L'étudier et la tracer.

   b. Calculer l'aire de la boucle.

4. Soit C la courbe dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $(\mathbb{R}, F)$ où :
   $$F : t \mapsto \begin{bmatrix} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = h(t) \end{bmatrix} \quad \text{où } h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

   a. Dans cette question uniquement on prend $h = \cosh$.
   Calculer la longueur de l'arc d'extrémités $A = F(0)$, $B = F(b)$ où $b > 0$.

   b. On suppose désormais que h' ne s'annule pas.
   Soit $M = F(t)$; justifier l'existence du point P intersection du plan xOy avec la tangente en M à C, et calculer ses coordonnées.

   c. Quand M décrit C, P décrit une courbe Γ.
   Trouver toutes les fonctions h pour lesquelles Γ est un cercle de centre O .

   d. Essayer alors de visualiser mentalement C.

5. a. Trouver un paramétrage (I, F) du cercle C de centre $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et de rayon 1.

   b. Calculer les coordonnées du point P projection orthogonale de O sur la tangente à C au point $F(t)$.

   c. Quand t décrit I , P décrit une courbe qu'on demande d'étudier et de tracer.