ψ^* 2020 : TD 7 des 2 et 4 novembre
Algèbre linéaire élémentaire

1. $E = \mathbb{K}_n[X]$, $F = \left\{ P \in E \mid \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$.
   Montrer que F est un hyperplan de E, et trouver un supplémentaire de F.

2. Interpolation de Lagrange.
   Soient $a_1, ..., a_n$ des scalaires *distincts*, $b_1, ..., b_n$ des scalaires quelconques.
   a. Montrer que $\Phi : P \mapsto [P(a_1), \ldots, P(a_n)]^T$ est un isomorphisme d'ev de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.
   b. Montrer que pour tout choix de $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe exactement un $P_0 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant :
   $$\forall i \in [1 \cdot\cdot n] \ , \ P_0(a_i) = b_i$$
   c. On définit :
   $$L_k = \prod_{i \in [1 \cdot\cdot n] \setminus \{k\}} \left(\frac{X - a_i}{a_k - a_i} \right)$$
   Montrer que $B = [L_1, \ldots, L_n]$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   d. Donner la décomposition de P_0 dans B.

3. Interpolation d'Hermite.
   Soient $a_1, ..., a_n$ des scalaires *distincts*, $b_1, ..., b_n, c_1, ..., c_n$ des scalaires quelconques.
   a. Montrer qu'il existe exactement un $P_1 \in E = \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ vérifiant :
   $$\forall i \in [1 \cdot\cdot n] \ , \ \begin{cases} P_1(a_i) = b_i \\ P_1'(a_i) = c_i \end{cases}$$
   b. Trouver des polynômes $Q_1, \ldots, Q_n, R_1, \ldots, R_n$ dans E vérifiant :
   $$\forall (i,j) \in [1 \cdot\cdot n]^2 \ , \ \begin{cases} Q_i(a_j) = 0 \\ Q_i'(a_j) = \delta_{i,j} \end{cases} \ , \ \begin{cases} R_i(a_j) = \delta_{i,j} \\ R_i'(a_j) = 0 \end{cases}$$
   On les exprimera à l'aide des L_k de l'exercice 3, et des $d_k = L_k'(a_k)$, qu'on ne cherchera pas à calculer.
   c. Montrer que $B = [Q_1, ..., Q_n, R_1, ..., R_n]$ est une base de E, et donner la décomposition de P_1 dans B.

4. Soit E un ev de dimension finie n , $C = [e_1, ..., e_n]$ une base de E.
   On fixe une base $B = [f_1, ..., f_n]$ de E^* (ev des formes linéaires sur E).
   a. Montrer qu'il existe exactement une base $D = [u_1, ..., u_n]$ de E vérifiant :
   $$\forall (i,j) \in [1 \cdot\cdot n]^2 \ , \ f_i(u_j) = \delta_{i,j}$$
   Indication : traduire ces conditions matriciellement dans la base C.
   b. Soit $g \in E^*$; calculer les coordonnées de g dans B, en fonction des u_i .