

# $\psi^*$ 2020 : TD 8 du 9 novembre

## Endomorphismes, matrices carrées

1. Calculer le rang de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficients :

$$\forall (i, j) \in [1 \cdot \cdot n]^2, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ -1 & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.  $E$  ev de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

a. Montrer l'existence d'un entier  $p$  tel que :

- $\forall k < p, \text{Ker } u^k \subsetneq \text{Ker } u^{k+1}$  ;
- $\forall k \geq p, \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$

b. Montrer que pour ce même  $p$  :

- $\forall k < p, \text{Im } u^k \subsetneq \text{Im } u^{k+1}$  ;
- $\forall k \geq p, \text{Im } u^k = \text{Im } u^{k+1}$

c. Montrer que  $\text{Ker } u^p$  et  $\text{Im } u^p$  sont supplémentaires.

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficients :

$$\forall (i, j) \in [1 \cdot \cdot n]^2, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Calculer  $\det(A + 2\cos\theta I)$  (il faut distinguer 3 cas selon  $\theta$ ).

b. Trouver  $n$  réels distincts  $\lambda$  tels que  $A - \lambda I$  est non inversible (**valeurs propres** de  $A$ ).