ψ^* 2020 : TD 9 des 16 et 18 novembre
Déterminants

1. Soient $b_0, ..., b_{n-1}$ des scalaires, et A la matrice carrée de taille n définie par $a_{i,j} = b_r$ où r est le reste de la division de $j - i$ par n.

   a. Écrire la matrice A .

   b. On fixe ω une racine $n^{\text{è}}$ de 1, et on pose $X = [1, \omega, \dots, \omega^{n-1}]^T$.
   Calculer AX et vérifier qu'il est proportionnel à X (on dit que X est un **vecteur propre** de A).

   c. On pose $\omega_j = \exp\left(i\frac{j2\pi}{n}\right)$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$; calculer AB.

   d. En déduire $\det A$.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$

   a. Calculer $\det(\lambda I - A)$, où λ est un scalaire.
   Indication : bien que ce ne soit pas naturel, le plus direct est de développer par rapport à la dernière colonne.

   b. Dans le cas où tous les a_i valent -1 : calculer les **valeurs propres** de A, c'est à dire les scalaires λ pour lesquels $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$ avec $a_1, \dots, a_{n-1}$ réels non tous nuls, $n \geq 3$.

   a. Calculer $\chi_A = \det(XI - A)$ (X polynôme, donc χ_A aussi).

   b. Vérifier que χ_A est un polynôme annulateur de A (théorème de Cayley-Hamilton).