ψ^* 2020 : TD 10 des 23 et 25 novembre

Éléments propres

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Q un polynôme annulateur de A non nul de degré minimal.
   Montrer que les valeurs propres de A sont exactement les racines de Q.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = i$.

   a. Trouver son spectre, sans calculer de déterminant.

   b. Trouver une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

   c. Construire D diagonale et P inversible à coefficients réels, telles que $A = PDP^{-1}$.

3. $E = \mathbb{R}_n[X]$, a, b réels distincts, u défini par $u(P) = (X-a)(nP - (X-b)P'$.

   a. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

   b. Déterminer ses valeurs propres et ses sous espaces propres, sans utiliser de représentation matricielle.

   c. Existe-t-il une base de E constituée de vecteurs propres ? Si oui, quelle est la matrice de u dans cette base ?

4. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, u défini par $u(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \max(x,t) f(t) dt$.

   a. Vérifier que u est un endomorphisme de E.

   b. Montrer que chaque $u(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée ; puis montrer que $u(f)$ est $\mathcal{C}^2$ et préciser sa dérivée.

   c. Déterminer le spectre et les sous espaces propres de u .

5. $A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

   a. Déterminer son polynôme caractéristique, puis son spectre.

   b. Calculer les dimensions des sous-espaces propres de A ; à quelle CNS sur a sont-ils supplémentaires ?

   c. Diagonaliser A quand c'est possible.