# $\psi^*$ 2020 : TD 11 des 30 novembre et 2 décembre Diagonalisation et trigonalisation

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ vérifiant $\exists p \in \mathbb{N}^*$ , $A^p = I$ .
   Montrer que $A^{12} = I$ .

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$

   a. Étudier la diagonalisabilité de $A$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

   b. Diagonaliser $A$ sur $\mathbb{C}$.

   c. Montrer que $A$ est diagonalisable par blocs sur $\mathbb{R}$, c'est à dire semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale par blocs de taille 2 à préciser.
   Indication : il suffit de permuter les vecteurs de la base canonique.

3. $E$ ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ , $v \in \mathcal{L}(E)$ .
   On suppose que $u$ et $v$ sont tous deux diagonalisables et commutent.
   Montrer qu'il existe une base de $E$ qui les diagonalise simultanément.

4. On va prouver par récurrence sur la dimension la CNS de trigonalisabilité.
   $\mathcal{H}_n$ : " pour tout $(E, u)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, $u$ est trigonalisable. "

   a. Montrer que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

   b. On suppose $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie, et on prend $(E, u)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$.
   Construire une base $B = [e_1, \ldots, e_n]$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ a la forme suivante :
   $$A = \begin{bmatrix} \lambda & L \\ 0 & M \end{bmatrix}$$
   où $M$ est de taille $n - 1$ .

   c. On note $F = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ et $v$ l'endomorphisme de $F$ représenté par $M$ dans $[e_2, \ldots, e_n]$ . Montrer que $v$ est trigonalisable.

   d. Construire une base trigonalisant $u$, et conclure.