ψ^* 2020 : TD 12 des 7 et 9 décembre
Suites et séries de fonctions

1. $f_n : x \mapsto n^2 x e^{-nx}$.

   a. Étudier la convergence simple.

   b. Étudier la convergence uniforme globale.

   c. On prend $a > 0$; y a-t-il convergence uniforme sur $[a, +\infty[$?

2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } |x| \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Méthode :

   - Après avoir calculé la limite simple f, il faut calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ en étudiant la fonction différence.
   - Comme le signe de $f_n'(x) - f'(x)$ n'est pas évident, il faut factoriser l'exponentielle et dériver ce qui reste pour obtenir son signe.
   - Au final on doit obtenir $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}\,\alpha_n^2\,e^{-\alpha_n^2}$ où on ne connait pas α_n , mais on peut conclure quand même.

3. On pose $A = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx$.

   a. Montrer que $F : x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. Ceci assure l'existence de A.

   b. Utiliser la formule :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\ ,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

   pour construire une série de fonctions uniformément convergente vers F sur $[0,1]$.

   c. Calculer A à l'aide de cette série.

4. a. Prouver que $\forall x \in \left]-1,1\right[\ ,\ \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n}$.

   b. Prouver que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5. Étude complète de $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ où x est réel.