ψ^* 2018 : TD 12 des 3 et 5 décembre
Suites et séries de fonctions

1. Étudier la convergence uniforme, d'abord globale puis sur tout segment, de $(f_n)^*_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(-(x-n)^2\right) \end{array} \right.$$

2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)^*_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \end{array} \right.$$

   Méthode :

   - Après avoir calculé la limite simple f, il faut calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ en étudiant la fonction différence.
   - Comme le signe de $f_n'(x) - f'(x)$ n'est pas évident, il faut factoriser l'exponentielle et dériver ce qui reste pour obtenir son signe.
   - Au final on doit obtenir $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}\alpha_n e^{-\alpha_n}$ où on ne connait pas α_n , mais on peut conclure quand même.

3. Montrer que :
$$\forall x \in \,]-1,1[\ ,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t^2)^n dt$$
   En utilisant le théorème d'interversion des limites, en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx$.

   a. Montrer que $F : x \mapsto \ln x \ln(1-x)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. Ceci assure l'existence de I.

   b. Utiliser le DSE de ln pour construire une série de fonctions uniformément convergente vers F sur $[0,1]$.

   c. Calculer I à l'aide de cette série.