

# $\psi^*$ 2018 : TD 13 des 10 et 12 décembre

## Séries de fonctions, séries entières

1. Étude complète de  $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$  (domaine de définition, limites, dérivabilité, variations).

2. Montrer que  $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} x^n$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$  à préciser, et  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intérieur de  $I$ .  
Est-elle dérivable en  $-1$  ?

3.  $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  avec  $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ ,  $x$  complexe.  
Rayon de convergence, domaine de définition, expression.

4.  $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) x^n$  avec  $x$  complexe et  $\theta \in ]0, \pi[$  fixé.  
Rayon de convergence, domaine de définition, expression.

5.  $G : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$  avec  $x$  réel et  $\theta \in ]0, \pi[$  fixé.  
Rayon de convergence, expression pour  $x \in ]-1, 1[$ .

6. Existence, rayon, coefficients du DSE de arcsin.

7. Domaine de définition et expression explicite sur  $]-R, R[$  des fonctions de variable réelle :

a.  $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n+1}$

b.  $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$

c.  $H : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^n$

8.  $F : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$  avec  $x$  réel.

a. Montrer que  $F$  est développable en série entière, sur un intervalle à préciser.

b. Montrer que  $F$  est solution d'une EDL1, et en déduire les coefficients de son DSE.

c. Trouver une expression explicite de  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ .