ψ^* 2020 : TD 15 des 11 et 13 janvier
Intégration généralisée

1. $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$, $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$.

   a. Justifier la convergence de A et B.

   b. Calculer $A + B$ en fonction de A.

   c. En déduire leur valeur.

2. Justifier la convergence de $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$, puis la calculer.

3. Idem avec $D = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$.

   On rappelle que $\operatorname{arg\,sinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

4. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\, dt$.

5. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x - 1}\, dt$.

   a. Domaine de définition (ensemble des x pour lesquels l'intégrale est convergente).

   b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^x - 1}\, dt$ à l'aide d'un développement en série.

   c. Faire de même avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x - 1}\, dt$.

   d. En déduire $F(x)$ comme somme d'une famille indexée par $\mathbb{Z}$.

6. $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t + 1}\, dt$.

   a. Justifier son existence.

   b. La calculer par développement en série.