ψ^* 2018 : TD 15 des 7 et 9 janvier
Intégration généralisée

1. $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt$, $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$.

   a. Justifier la convergence de A et B.

   b. Trouver deux relations indépendantes entre A et B, et en déduire leur valeur.

2. Justifier la convergence de $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$, puis la calculer.

3. Idem avec $D = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$.
   On rappelle que $\operatorname{arg\,sinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

4. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\, dt$.

5. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x - 1}\, dt$

   a. Domaine de définition (ensemble des x pour lesquels l'intégrale est convergente).

   b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^x - 1}\, dt$ à l'aide d'un développement en série.

   c. Faire de même avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x - 1}\, dt$.

   d. En déduire $F(x)$ comme somme d'une famille indexée par $\mathbb{Z}$.

6. $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt$

   a. Justifier son existence.

   b. La calculer par développement en série.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}e^t\, dt$ (coefficients de Fourier de exp).

   d. On admet le théorème de Parseval : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t\right)^2 dt$.
   En déduire la valeur de A.