ψ^* 2020 : TD 16 des 18 et 20 janvier
Intégrales à paramètre

1. Transformée de Fourier. Soit $E = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On définit :

$$\widehat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\, dt$$

   a. Montrer que $\Phi : f \mapsto \widehat{f}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

   b. Calculer la transformée de Fourier de $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   c. Soit $f \in E$ quelconque, $a > 0$, $f_a : t \mapsto f(at)$, $f^a : t \mapsto f(t-a)$.
   Vérifier que f_a et f^a sont dans E, puis exprimer $\Phi(f_a)$ et $\Phi(f^a)$ à l'aide de $\Phi(f)$.

   d. On suppose que $f(t) =_{\pm\infty} O(t^{-p})$ avec $p \geq 2$. Quelle est la classe de $\widehat{f}$?

   e. On prend $f : t \mapsto \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.
   Montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^1$, calculer sa dérivée, en déduire son expression.

   f. Trouver une valeur propre de Φ .

2. On note G la transformée de Fourier de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

   a. Étudier la parité de G.

   b. Montrer que G est bornée.

   c. Pour $x > 0$, faire le changement de variable $s = xt$ dans l'intégrale définissant $G(x)$.
   Montrer ensuite que G est $\mathcal{C}^2$ sur $J =]0, +\infty[$.

   d. Montrer que $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{x}{x^2+s^2}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \left(\frac{x}{x^2+s^2}\right)$.

   e. En déduire que G est solution sur J de l'EDL $y'' - y = 0$.

   f. Déduire de tout ce qui précède l'expression explicite de G sur J, puis sur $\mathbb{R}$.

   g. G est-elle dérivable en 0 ?

3. $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 + x\cos t)\, dt$.

   a. Intervalle de définition (on le notera J).

   b. Étudier la parité de H.

   c. Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de J (noté J^0).

   d. Trouver l'expression explicite de H' en utilisant le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

   e. En déduire l'expression explicite de H sur J^0, puis sur J.