ψ^* 2020 : TD 18 des 1 et 3 février
Probabilités, VARD

1. La tortue défie le lièvre avec la règle suivante : le lièvre lance 2 dés, s'il obtient une somme de 12 il avance de 25 cases, sinon la tortue avance d'une case et le lièvre rejoue.

   a. Quelle est la probabilité que le lièvre n'arrive jamais à 50 ?

   b. Si on met l'arrivée à 50, quelle est la probabilité que le lièvre gagne ?

   c. À quelle case faut-il mettre l'arrivée pour que le jeu soit le plus équilibré possible ?

2. Un QCM comporte 20 questions, et pour chaque question r réponses possibles dont une seule est juste. Le barème est le suivant :

   - on attribue 1 point par réponse juste ;
   - pour les réponses fausses, le candidat a le droit de proposer une autre réponse et obtient alors 1/2 point par réponse juste.

   Un candidat totalement ignare répond aléatoirement aux questions, mais il n'est pas assez bête pour refaire 2 fois la même erreur. On note X son score après la première tentative, Y le nombre de bonnes réponses au rattrapage, Z son score final.

   a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

   b. Déterminer la loi de Y et son espérance pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot \mid X = j)$.

   c. En déduire, *sans chercher à calculer la loi de* Y, l'espérance de Y.

   d. Quelle valeur faut-il donner à r pour que les candidats ignares aient en moyenne 5/20 ?

3. Une urne contient une proportion p de boules blanches, les autres étant noires. Ces boules sont indiscernables au toucher. On effectue une succession de tirages avec remise, et on note S_k le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la $k^{\text{è}}$ boule blanche. On pose $S_0 = 0$ et on définit $T_k = S_k - S_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   a. Déterminer la loi de T_k , son espérance, sa variance.

   b. Calculer l'espérance, la variance, la fonction génératrice de S_k .

   c. Déduire la loi de S_k de sa fonction génératrice.

   d. Retrouver cette loi par un raisonnement direct.

4. La **fonction caractéristique** d'une VAE X est $\Phi_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$.

   a. Montrer que Φ_X est définie sur $\mathbb{R}$, continue, 2π-périodique.

   b. Calculer $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\Phi_X(t)dt$. En déduire que la loi de X est caractérisée par Φ_X .

   c. Montrer que si $X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, alors Φ_X est $\mathcal{C}^1$. Exprimer alors $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de Φ_X .

   d. Montrer que si $X \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, alors Φ_X est $\mathcal{C}^2$. Exprimer alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de Φ_X .