ψ^* 2020 : TD 19 des 22 et 24 février
VAD réelles, VAD vectorielles

1. Le nombre quotidien N de clients d'un supermarché suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Ce magasin dispose de n caisses, où les clients se répartissent équiprobablement après leurs achats (irréaliste mais plus simple). On note X le nombre de clients qui passent par la caisse 1 en une journée. Quelle est sa loi ? Était-ce prévisible ?

2. On lance une pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. On note X le nombre de lancers effectués. On tire alors équiprobablement un numéro entre 1 et $X-1$, noté Y.

   a. Loi de X, espérance, variance.

   b. Loi de Y, espérance, variance.

   c. Corrélation entre X et Y.

3. X, Y, Z sont des VAD indépendantes. X et Y suivent $\mathcal{P}(\lambda)$, Z suit $\mathcal{P}(\mu)$.
   On pose $S = X + Z$, $T = Y + Z$.

   a. Calculer la corrélation entre S et T.

   b. Calculer la loi conditionnelle de Z sachant $S = n$.

   c. Montrer que Y et S sont indépendantes :

      i. par un argument qualitatif ;

      ii. par le calcul.

   d. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(T \mid S = n)$.

4. X, Y sont des VA indépendantes qui suivent toutes deux $\mathcal{G}(p)$.
   On note $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$, $D = |X - Y|$.

   a. Déterminer la loi de (U, V) .

   b. En déduire les lois de U et V .

   c. Prouver que U, V, D sont dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$, et calculer leur espérance.

   d. Prouver que U, V, D sont dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, et calculer leur variance.