

ψ^* 2017 : TD 19 des 5 et 7 février

Variables aléatoires réelles discrètes

1. Un QCM comporte 20 questions, et pour chaque question r réponses possibles dont une seule est juste. Le barème est le suivant :

- on attribue 1 point par réponse juste ;
- pour les réponses fausses, le candidat a le droit de proposer une autre réponse et obtient alors $1/2$ point par réponse juste.

Un candidat totalement ignare répond aléatoirement aux questions, mais il n'est pas assez bête pour refaire 2 fois la même erreur. On note X son score après la première tentative, Y le nombre de bonnes réponses au rattrapage, Z son score final.

- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .
- Pour la probabilité conditionnelle sachant $X = j$, déterminer la loi et l'espérance de Y .
- En déduire l'espérance de Y , *sans chercher à calculer sa loi*.
- Quelle valeur faut-il donner à r pour que les candidats ignares aient en moyenne $5/20$?
- Pour cette valeur de r , déterminer la loi de Y .

2. Le nombre quotidien N de clients d'un supermarché suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Ce magasin dispose de n caisses, où les clients se répartissent équiprobablement après leurs achats (irréaliste mais plus simple). Calculer la loi du nombre de clients qui passent par la caisse 1 en une journée.

3. X, Y, Z sont des VAD indépendantes. X et Y suivent $\mathcal{P}(\lambda)$, Z suit $\mathcal{P}(\mu)$. On pose $S = X + Z$, $T = Y + Z$.

- Calculer la loi conditionnelle de Z sachant $S = n$.
- Montrer que Y et S sont indépendantes.
- Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(T \mid S = n)$.
- Montrer que $\mathbb{E}(T \mid S = n) \geq n \Leftrightarrow \mathbb{E}(S) \geq n$.
- La taille d'un arbre est la somme de 2 variables aléatoires suivant chacune une loi de Poisson : une variable X dépendant du milieu d'implantation, et une variable Z dépendant du patrimoine génétique. Ainsi on peut interpréter S comme la taille d'un arbre père et T comme la taille de son arbre fils (même patrimoine génétique, implantation différente). Que signifie le résultat précédent ?

4. Une urne contient une proportion p de boules blanches, les autres étant noires. Ces boules sont indiscernables au toucher. On effectue une succession de tirages avec remise, et on note S_k le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la k^{e} boule blanche.

- Calculer l'espérance, la variance, la fonction génératrice de S_k .
- Calculer la loi de S_k à l'aide de sa fonction génératrice, puis directement.

5. La **fonction caractéristique** d'une VAED X est $\Phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$.
- a. Montrer que Φ_X est définie sur $\mathbb{R}$, continue, 2π -périodique.
 - b. Calculer $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \Phi_X(t) dt$. En déduire que la loi de X est caractérisée par Φ_X .
 - c. Montrer que si X admet une espérance, alors Φ_X est C^1 , et exprimer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de Φ_X .
 - d. Énoncer et prouver un résultat analogue pour la variance.
 - e. Calculer la fonction caractéristique d'une loi géométrique, puis d'une loi de Poisson.