ψ^* 2020 : TD 20 des 1 et 3 mars
VAD vectorielles

1. Le nombre journalier de clients d'un magasin suit une loi de Poisson, mais on ignore son paramètre λ. On sait juste qu'il est inférieur à 100.
   On souhaite évaluer λ en utilisant la loi des grands nombres. Sur combien de jours doit-on calculer la moyenne statistique pour connaître λ à 1 près avec une probabilité supérieure à 0.9 ?

2. N est une VAE telle que $R_N > 1$. Les X_i sont des VAE indépendantes et de même loi, telles que $R_{X_1} > 1$. Enfin $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

   a. Montrer que S est une VAE.

   b. Montrer que sur $[-1, 1]$ au moins, $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.

   c. En déduire que S admet une espérance et une variance, et les calculer.

   d. La bactérie EC a un nombre de descendants qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. On considère que tous les individus d'une population de EC sont indépendants. On note Y_n le nombre d'individus de la génération n (après la mort de la génération précédente). Exprimer l'espérance et la variance de Y_{n+1} en fonction de celles de Y_n .

   e. Calculer l'espérance et la variance de Y_n .

3. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$.
   Un point, initialement en $(0, 0)$, se déplace par sauts successifs de longueur 1 dans chacune des 4 directions équiprobables. On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ sa position après n sauts.

   a. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

   b. Sans calculer la loi de X_n , calculer son espérance et sa variance. Idem pour Y_n .

   c. Calculer l'espérance de $\|Z_n\|_2^2$, et majorer l'espérance de $\|Z_n\|_2$.

   d. Calculer la probabilité que $Z_n = (0, 0)$ (retour à l'origine).
      Le résultat fait intervenir une somme de carrés de coefficients binomiaux.

   e. Calculer de deux manières le DSE de $(1 + x)^n (1 + x)^m$ et en déduire une formule explicite pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$ (formule de Vandermonde).

   f. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{P}(Z_{2p} = (0, 0))$, et un équivalent quand $p \to \infty$.

4. Pour les courageux/ses : reprendre l'exercice précédent dans $\mathbb{Z}^3$.