ψ^* 2018 : TD 20 des 11 et 13 février
VAD vectorielles

1. X, Y sont des VA indépendantes qui suivent toutes deux $\mathcal{G}(p)$.
   On note $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$, $D = |X - Y|$.

   a. Déterminer la loi de (U, V) .

   b. En déduire les lois de U et V .

   c. Calculer l'espérance de U, V, D .

   d. Calculer la variance de U, V, D .

   e. Calculer le coefficient de corrélation entre U et V .

2. Le nombre journalier de clients d'un magasin suit une loi de Poisson, mais on ignore son paramètre λ . On sait juste qu'il est inférieur à 100 .
   On souhaite évaluer λ en utilisant la loi des grands nombres. Sur combien de jours doit-on calculer la moyenne statistique pour connaître λ à 1 près avec une probabilité supérieure à 0.99 ?

3. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$.
   Un point, initialement en $(0, 0)$, se déplace par sauts successifs de longueur 1 dans chacune des 4 directions équiprobables. On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ sa position après n sauts.

   a. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

   b. Sans calculer la loi de X_n , calculer son espérance et sa variance.

   c. Calculer l'espérance de $\|Z_n\|_2^2$, et majorer l'espérance de $\|Z_n\|_2$.

   d. Calculer la probabilité que $Z_n = (0, 0)$ (retour à l'origine).
   Le résultat fait intervenir une somme de carrés de coefficients binomiaux.

   e. Calculer de deux manières le DSE de $(1 + x)^n\,(1 + x)^m$ et en déduire une formule explicite pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}$ (formule de VDM).

   f. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{P}(Z_{2p} = (0, 0))$, et un équivalent quand $p \to \infty$.

4. Reprendre l'exercice précédent dans $\mathbb{Z}^3$.