ψ^* 2017 : **TD 20 du 28 février**

Couples et vecteurs aléatoires discrets

1. On lance une pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. On note X le nombre de lancers effectués. On tire alors équiprobablement un numéro entre 1 et $X-1$, noté Y.

   a. Loi de X, espérance, variance.

   b. Loi de Y, espérance, variance.

   c. Corrélation entre X et Y.

2. X, Y sont des VA indépendantes qui suivent toutes deux $\mathcal{G}(p)$.
   On note $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$, $D = |X - Y|$.

   a. Déterminer la loi conjointe de (U, V) .

   b. En déduire les lois de U et V .

   c. Calculer l'espérance de U, V, D .

   d. Calculer la variance de U, V, D .

   e. Calculer le coefficient de corrélation entre U et V .

3. N est une VAED telle que $R_N > 1$. Les X_i sont des VAED indépendantes et de même loi, telles que $R_{X_1} > 1$. Enfin $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

   a. Montrer que S est une VAED.

   b. Montrer que sur $[0, 1]$ au moins, $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.

   c. En déduire que S admet une espérance et une variance, et les calculer.

   d. La bactérie EC a, au cours de sa vie, un nombre de descendants qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. On considère que tous les individus d'une population de EC sont indépendants. On note Y_n le nombre d'individus de la génération n (après la mort de la génération précédente).
   Exprimer l'espérance et la variance de Y_{n+1} en fonction de celles de Y_n .

   e. Calculer l'espérance et la variance de Y_n .

4. Le nombre journalier de clients d'un magasin suit une loi de Poisson, mais on ignore son paramètre λ. On sait juste qu'il est inférieur à 100 .
   On souhaite évaluer λ en utilisant la loi des grands nombres. Sur combien de jours doit-on calculer la moyenne statistique pour connaître λ à 1 près avec une probabilité supérieure à 0.99 ?