ψ^* 2019 : TD 21 des 12 et 19 février
Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

1. $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel, F est le sev des fonctions nulles sur $[0,1]$.

   a. Lemme : montrer que si f est positive et g est continue sur $[a,b]$, alors :
   $$\exists c \in [a,b] \ , \ \int_a^b fg = g(c) \int_a^b f$$

   b. Soient $a \in \left]-1,1\right[$ et $f_{a,n}$ la fonction pic centrée en a, nulle hors de $\left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$, et d'intégrale 1. Pour $g \in E$ quelconque, calculer $\lim_{n\infty}(f_{a,n} \mid g)$.

   c. Déterminer $F^\perp$.

   d. Montrer que $F \oplus F^\perp \neq E$.

2. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel. F est le sev de E engendré par $a : t \mapsto t$ et $b : t \mapsto t^2$.

   a. Calculer la projection orthogonale de $g : t \mapsto \ln(1+t)$ sur F.

   b. Écrire le code Python qui permettrait de calculer la distance de g à F .

3. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $\min \left\{ \sum_{(i,j)\in[1..n]^2} (a_{i,j} - x_{i,j})^2 \mid X \in S_n(\mathbb{R}) \right\}$, et le calculer.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de Hilbert :
   $$H_n = \left[\frac{1}{i+j+1}\right]_{(i,j)\in[0..n]^2}$$
   est inversible. Indication : l'interpréter comme une matrice de Gram.

5. I est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a est un réel.

   a. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \exists A_n \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ P'(a) = \int_I A_n(t)P(t)dt$$

   b. Montrer que ceci est faux si on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$.

   c. Utiliser l'argument précédent pour obtenir une minoration du degré de A_n .

   d. Reprendre les questions précédentes avec $P''(a)$.

6. Soient E un espace euclidien, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram.

   a. On prend x, y des vecteurs quelconques de E, et X, Y leur matrice colonne dans B. Exprimer $(x \mid y)$ à l'aide de X, Y, G .

b. En déduire que G est inversible.

c. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de G sont strictement positives.

d. Montrer que toutes les valeurs propres de G sont réelles.
Indication : pour X vecteur propre de G, calculer et comparer $\overline{X}^T G X$ et $X^T G \overline{X}$.