

ψ^* 2017 : TD 21 des 5 et 7 mars

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

1. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel, F est le sev des fonctions nulles sur $[0, 1]$.

a. Lemme : montrer que si f est positive et g est continue sur $[a, b]$, alors :

$$\exists c \in [a, b], \int_a^b fg = g(c) \int_a^b f$$

b. Soient $a \in]-1, 1[$ et $f_{a,n}$ la fonction pic centrée en a , nulle hors de $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$, et d'intégrale 1. Pour $g \in E$ quelconque, calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{a,n} | g)$.

c. Déterminer F^\perp .

d. Montrer que $F \oplus F^\perp \neq E$.

2. $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel : $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
 F est le sev de E engendré par $a : t \mapsto t$ et $b : t \mapsto t^2$.

Calculer la projection orthogonale de $g : t \mapsto \ln(1+t)$ sur F .

3. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Justifier l'existence de $m = \min \left\{ \sum_{(i,j) \in [1..n]^2} (a_{i,j} - x_{i,j})^2 \mid X \in S_n(\mathbb{R}) \right\}$, et le calculer.

4. I est un segment de \mathbb{R} non réduit à un point, a est un réel.

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], P'(a) = \int_I A_n(t)P(t)dt$$

b. Montrer que ceci est faux si on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$.

c. Généraliser avec $P''(a)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice de Hilbert $H_n = \left[\frac{1}{i+j-1} \right]_{(i,j) \in [1..n]^2}$ est inversible.
Indication : l'interpréter comme une matrice de Gram.

6. Soient E un espace euclidien, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , G sa matrice de Gram.

a. On prend x, y des vecteurs quelconques de E , et X, Y leur matrice colonne dans B .
Exprimer $(x | y)$ à l'aide de X, Y, G .

b. En déduire que G est inversible.

c. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de G sont strictement positives.

d. Montrer que toutes les valeurs propres de G sont réelles.

Indication : pour X vecteur propre de G , calculer et comparer $\overline{X}^T GX$ et $X^T G \overline{X}$.