ψ^* 2018 : TD 21 des 4 et 6 mars
Isométries, SDL1

1. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer $\exists!(Q,R) \in \mathcal{O}_n \times T_n^{++}\ A = QR$.

2. Soit E euclidien, p un projecteur de E, s une symétrie de E.
   a. p peut-il être une isométrie ?
   b. Montrer que p est un projecteur orthogonal ssi il est symétrique.
   c. Montrer que s est une isométrie ssi elle est symétrique.
   d. Quelle est l'intersection de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$?

3. Montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale sont de module 1.

4. Que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle ?

5. Soient E euclidien, B une base ON de E, f une isométrie de E n'admettant pas de valeur propre réelle, A la matrice de f dans B.
   a. Montrer que f est une rotation.
   b. On prend λ une valeur propre complexe de A, U un vecteur propre de A associé à λ (et donc dans $\mathbb{C}^n$). Montrer que $U^TU = 0$.
   c. On définit :
   $$V = \frac{1}{2}(U + \overline{U}) \quad , \quad W = \frac{1}{2i}(U - \overline{U})$$
   Montrer que V et W sont à coefficients réels, et donc représentent 2 vecteurs v, w de E. Montrer que v et w sont orthogonaux et ont même norme non nulle.
   d. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(v,w)$ est stable par f, et trouver la matrice de l'endomorphisme induit.
   e. Montrer que $F^\perp$ est stable par f, et que g induit par f sur $F^\perp$ vérifie les mêmes hypothèses que f.
   f. Montrer qu'il existe une base ON de E dans laquelle la matrice de F a la forme :
   $$\begin{bmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_q \end{bmatrix} \text{ où les } R_k \text{ sont du type } \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & \sin(\theta_k) \\ -\sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{bmatrix}$$

6. Résoudre, sur un intervalle maximal à préciser, le système différentiel :
   $$\begin{cases} x' = x + y + z + \mathrm{id} \\ y' = -2x - 2y - z \\ z' = 2x + 3y + 2z \end{cases} \quad \text{où id est l'identité de } \mathbb{R}$$
   Indication : il existe une solution où x, y, z sont affines.