ψ^* 2018 : TD 5 des 30 septembre et 2 octobre
Continuité

1. $f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \\ \frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$ est-elle prolongeable par continuité ?

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, a un point de E, $f : x \mapsto d(a,x)$.
   Prouver en utilisant la caractérisation séquentielle que f est continue.

3. Soient E et F deux ev de dimension finie, $f : E \to F$ définie sur E.
   Le **graphe** de f est $G = \{\,(x, f(x) \mid x \in E)\,\}$; c'est donc une partie de $E \times F$.

   a. Montrer en utilisant le critère séquentiel que si f est continue, alors son graphe est fermé.

   b. Trouver un contre-exemple, avec $E = F = \mathbb{R}$, montrant que la réciproque est fausse.

4. On fixe un entier naturel p ; justifier la continuité de :
   $$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^p \end{cases}$$
   On pourra commencer par le cas $p = 2$.

5. Déterminer si les parties suivantes de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont ouvertes, fermées, ou ni l'un ni l'autre.

   a. $S =_{déf} \{\,\text{matrices symétriques}\,\}$

   b. $O =_{déf} \{\, A \in E \mid A^T A = I \,\}$

   c. $V =_{déf} \{\, A \in E \mid \forall k \in [1..n] \ , \ \mathrm{tr}(A^k) > 0 \,\}$

   d. $N = \{\,\text{matrices nilpotentes}\,\}$

   e. $S^+ =_{déf} \{\, A \in S \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \ , \ X^T A X \geq 0 \,\}$

   f. $S^{++} =_{déf} \{\, A \in S \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ , \ X^T A X > 0 \,\}$

6. Soient E un ev de dimension finie, A une partie fermée non vide de E, b un point de E.
   On définit $d(b, A) = \inf \{\, d(b,x) \mid x \in A \,\}$.

   a. Cas A borné : montrer que c'est en fait un min.

   b. Montrer que ceci reste vrai même si A n'est pas borné.

7. Soit A une partie compacte d'un ev E de dimension finie, et f une application de A dans A vérifiant :
   $$\forall (x,y) \in A^2, \ x \neq y \ \Rightarrow \ d\left(f(x), f(y)\right) < d(x,y)$$

   a. En utilisant $g : x \mapsto d(x, f(x))$, montrer que f a au moins un point fixe.

   b. Montrer que le point fixe de f est unique.