

ψ^* 2019 : TD 7 des 14 et 16 octobre

Courbes paramétrées

1. Soit C la courbe dans \mathbb{R}^3 paramétrée par (\mathbb{R}, F) où :

$$F : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ h(t) \end{bmatrix}$$

h est une fonction \mathcal{C}^2 telle que h' ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

a. Dans cette question uniquement on prend $h = \cosh$.

Calculer la longueur de l'arc d'extrémités $A = F(0)$, $B = F(b)$ où $b > 0$.

b. Soit $M = F(t)$; calculer les coordonnées du point P intersection du plan xOy avec la tangente en M à C .

c. Quand M décrit C , P décrit une courbe Γ .

Trouver toutes les fonctions h pour lesquelles Γ est un cercle de centre O .

d. Essayer alors de visualiser mentalement C .

2. C est la courbe paramétrée par (\mathbb{R}, F) où :

$$F : t \mapsto \begin{bmatrix} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

a. L'étudier et la tracer.

b. Calculer l'aire de la boucle.

3. C est la courbe paramétrée par (\mathbb{R}, F) où $F : t \mapsto \begin{bmatrix} x = 3 - 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{bmatrix}$.

a. Déterminer l'intervalle d'étude minimal J , et les transformations à faire subir à $C' = F(J)$ pour obtenir C .

b. Déterminer les points stationnaires de C' et faire l'étude en ces points.

c. En tout point régulier de C' , calculer $d(t) = \text{Det}(F'(t), F''(t))$ et trouver son signe.

d. Tracer C' puis C sans faire d'étude supplémentaire.

e. Calculer la longueur totale de C .

4. a. Trouver un paramétrage (I, F) du cercle C de centre $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et de rayon 1.

b. Calculer les coordonnées du point P projection orthogonale de O sur la tangente à C au point $F(t)$.

c. Quand t décrit I , P décrit une courbe qu'on demande d'étudier et de tracer.