PSI* 2016 – 2017

TD N° 11

L'INFLUX NERVEUX (CENTRALE 2015 PC)

Les axones (ou fibres nerveuses) les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions. Un axone est modélisé par un cylindre de longueur importante par rapport à son diamètre. La différence de potentiel entre l'axoplasme et le liquide extérieur est de l'ordre de -70 mV. Les données géométriques et électriques des constituants de l'axone sont données figure 3 (la résistivité électrique est l'inverse de la conductivité électrique)

Les propriétés passives de l'axone illustrées sur la figure 4 sont déterminées par :
- la résistance de l'axoplasme (R_a) s'opposant au passage du courant le long de l'axone ;
- la résistance de la membrane ($R_m = 1/G_m$) déterminant la fuite du courant ;
- la capacité de la membrane (C_m) capable d'emmagasiner des charges électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane.

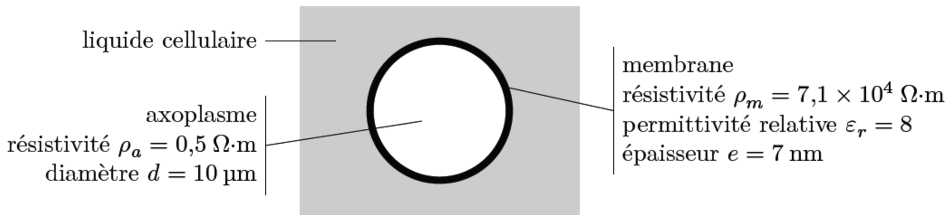

Figure 3 Vue en coupe schématisée d'un axone

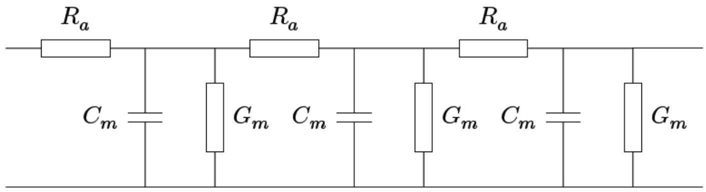

Figure 4 Circuit électrique équivalent de l'axone

Ainsi un axone peut être assimilé à un câble électrique imparfaitement isolé.

IV.A.1) Déterminer r_a, la résistance électrique par unité de longueur de l'axoplasme. Effectuer l'application numérique.

IV.A.2) Quelle hypothèse peut-on faire quant au calcul de la capacité par unité de longueur c_m et de la conductance de fuite par unité de longueur g_m au vu de la valeur du rapport e/d ?

IV.A.3) Déterminer c_m (on remplacera ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ dans les calculs) et g_m. Effectuer les applications numériques.

IV.B – Constante d'espace

Chaque longueur élémentaire de longueur dx de la fibre nerveuse est modélisée par une cellule représentée figure 5.

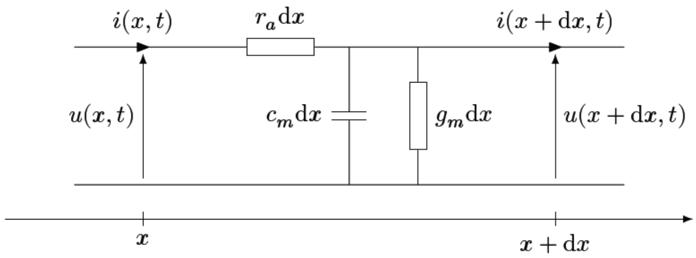

Figure 5 Schéma électrique élémentaire d'une fibre nerveuse

IV.B.1) Que devient ce schéma en régime permanent ?

IV.B.2) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x)$ et $i(x)$, puis celle vérifiée par $u(x)$ seulement. Faire apparaitre une constante λ, appelée constante d'espace, homogène à une distance. Donner l'expression de λ. Effectuer l'application numérique.

IV.B.3) Exprimer $u(x)$ en fonction de $u(0)$ et de λ. Préciser la signification physique de λ.

IV.B.4) Certains axones sont entourés d'une gaine de myéline, sorte de graisse aux propriétés électriques isolantes. Des mesures de tension électrique peuvent être effectuées le long de telles fibres. On obtient des résultats du type de ceux présentés figure 6.

En déduire la conductance linéique de fuite de l'axone myélinisé (que l'on notera g'_m par la suite), puis la conductance linéique de la gaine de myéline seule. Conclure.

IV.C – Régime variable

On se place en régime dépendant du temps et on supposera que les axones sont myélinisés. On supposera dans un premier temps que la capacité linéique par unité de longueur de l'axone est inchangée par rapport à un axone non myélinisé.

IV.C.1) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$ puis celle vérifiée par $u(x,t)$ seulement.

On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane progressive monochromatique $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$.

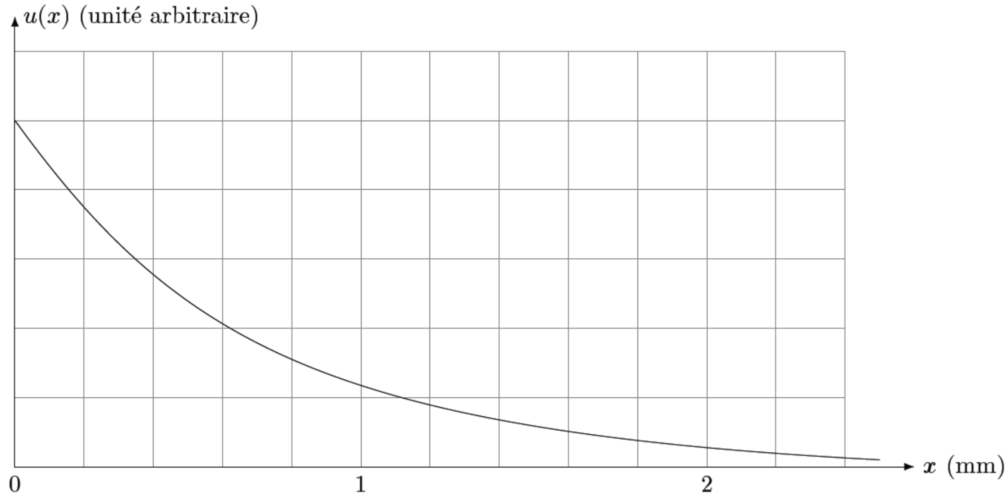

Figure 6 Évolution de la tension le long d'un axone myélinisé

IV.C.2) À quelle condition sur ω, c_m et g'_m l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie-t-elle en $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \dfrac{\partial u}{\partial t}$? À quelles fréquences cela correspond-il ? Conclure.

On supposera cette condition vérifiée par la suite.

IV.C.3) Quel est le phénomène décrit par cette équation ? Citer d'autres exemples analogues.

IV.C.4) Déterminer la relation de dispersion entre ω et k. Montrer que le milieu est dispersif et absorbant. Que valent les vitesses de phase et de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

IV.C.5) Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Commenter.