PSI 2023 - 2024*

TD n° 14 - Corde et Coaxial

EXERCICE 1 : Ondes stationnaires et perturbation par une masse

II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde tendue

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique μ, est soumise à une tension d'équilibre T. Ses déformations dans le plan (x, y) sont décrites par une fonction de hauteur $y = h(x,t)$. Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

– l'angle $\alpha(x,t)$ que fait la courbe h avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée $\partial h/\partial x$.
– les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective x_A et x_B. Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse x_C (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

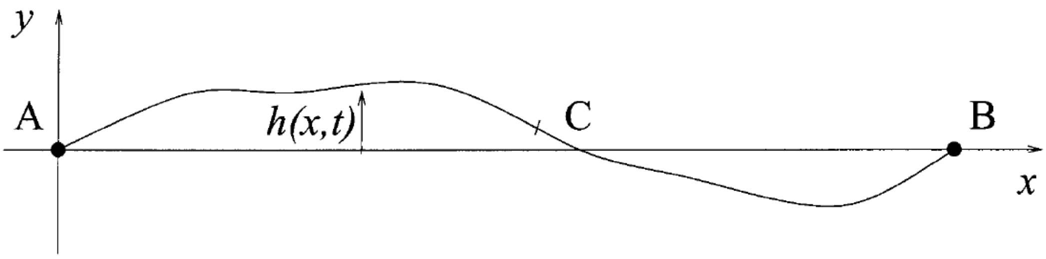

Figure II.1

- **II.1.1**
Soit un point O d'abscisse x_O situé dans l'intervalle [AB] ($x_A < x_0 < x_B$). La partie de la corde située à droite du point O ($x > x_O$) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force $\vec{F}(x_O, t)$.
Comment s'exprime, en fonction de T et d'une dérivée de $h(x,t)$, la composante verticale (suivant y) de cette force $\vec{F}$?

- **II.1.2**
Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par $h(x,t)$. Exprimer la célérité c associée en fonction des paramètres μ et T.

- **II.1.3**
Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée $\partial h/\partial x$ en des points autres que A et B ? Justifier votre réponse.

- **II.1.4**
La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit $h(x_A, t) = 0$ et $h(x_B, t) = 0$. La longueur de la corde entre ces deux points est $2L$, et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir $x_A = 0$ et $x_B = 2L$.
On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x,t) = Z\sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$$

où Z est une amplitude arbitraire.
Donner, en la démontrant, la relation existant entre ω, k et c.

- **II.1.5**
  Les valeurs admissibles de k (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes k_n, où $n = 1, 2, 3\ldots$ est entier positif.
  Donner l'expression des k_n admissibles, des pulsations propres ω_n et des fréquences f_n associées.
  Comment choisir la phase ϕ ?

- **II.1.6**
  Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1, telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.
  Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement k_2, k_3, k_4).
  Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

- **II.1.7**
  On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur** $e(x,t)$ associée à l'onde est égale à :

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]$$

  Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle e \rangle$ en un point quelconque x de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

- **II.1.8**
  En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension T de la corde, de sa demi-longueur L et de l'amplitude Z des vibrations.
  Application numérique : Que vaut l'amplitude Z des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec $L = 1$ m, $T = 100$ N ?

II.2 Perturbation par une masse

On accroche à la corde une perle de masse m, située exactement au milieu de la corde, au point d'abscisse $x_C = L$. Cette masse est supposée ponctuelle (sans épaisseur).

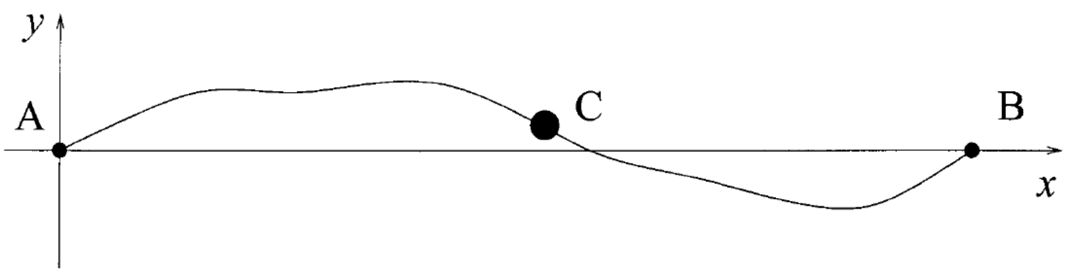

Figure II.2

- **II.2.1**
  En considérant les schémas tracés à la question II.1.6, déterminer les modes de vibration susceptibles d'être modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la masse m.
  Déterminer de la même façon les modes qui ne devraient pas être modifiés par la présence de la masse.

- **II.2.2**

En présence de cette masse supposée ponctuelle, les dérivées à gauche et à droite de $\partial h/\partial x$ ne sont pas nécessairement égales (la dérivée $\partial h/\partial x$ est discontinue en L).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD), trouver une relation entre T, m, $\partial^2 h/\partial t^2(L,t)$ (accélération suivant y de la masse), $\partial h/\partial x(L^-,t)$ et $\partial h/\partial x(L^+,t)$, où l'on a défini :

$$\partial h/\partial x(L^-,t) = \lim_{x\to L^-} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$$

lorsque x tend vers L par valeur inférieure, et :

$$\partial h/\partial x(L^+,t) = \lim_{x\to L^+} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$$

lorsque x tend vers L par valeur supérieure.

Illustrer votre relation par un schéma.

- **II.2.3**

On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à L, c'est-à-dire telle que $h(x,t) = h(2L-x,t)$, et donnée sur l'intervalle de gauche $0 \leq x < L$ par :

$$h(x,t) = \sin(Kx)\cos(\omega t)$$

où K est un vecteur d'onde à déterminer, et ω et K vérifient la relation de dispersion habituelle. Montrer que les conditions aux limites imposent désormais la condition de quantification suivante sur les valeurs possibles de ω et K :

$$\text{cotan}(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

- **II.2.4**

Tracer la courbe représentative de $\text{cotan}(x)$ sur l'intervalle $]0, 3\pi[$.

Montrer que si la masse m est nulle, on retrouve comme cas particulier de l'équation ci-dessus le vecteur d'onde k_1 de la fréquence de vibration de la corde homogène.

- **II.2.5**

Lorsque m est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en m du vecteur inconnu K :

$$K \simeq k_1 + \beta m$$

où β est une constante à déterminer en fonction de ω, c, T et L. On utilisera en particulier le développement limité suivant de la fonction cotangente, valable pour de petites valeurs de ε :

$$\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \simeq -\varepsilon$$

K est-il plus grand ou plus petit que k_1 ?

- **II.2.6**

Déduire de la question précédente le changement relatif de fréquence $\Delta f_1/f_1$ du mode de vibration fondamental de la corde lorsque l'on passe du vecteur k_1 au vecteur K. Exprimer le résultat en fonction de m, μ et L.

Application numérique : Calculer m lorsque $L = 1$ m, $T = 100$ N, $\mu = 10^{-2}$ kg.m^{-1}, $\Delta f_1 = -1$ Hz.

EXERCICE 2 : Propagation le long d'une fibre nerveuse

Les axones (ou fibres nerveuses) les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions. Un axone est modélisé par un cylindre de longueur importante par rapport à son diamètre. La différence de potentiel entre l'axoplasme et le liquide extérieur est de l'ordre de -70 mV. Les données géométriques et électriques des constituants de l'axone sont données figure 3 (la résistivité électrique est l'inverse de la conductivité électrique)

Les propriétés passives de l'axone illustrées sur la figure 4 sont déterminées par :
- la résistance de l'axoplasme (R_a) s'opposant au passage du courant le long de l'axone ;
- la résistance de la membrane ($R_m = 1/G_m$) déterminant la fuite du courant ;
- la capacité de la membrane (C_m) capable d'emmagasiner des charges électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la membrane.

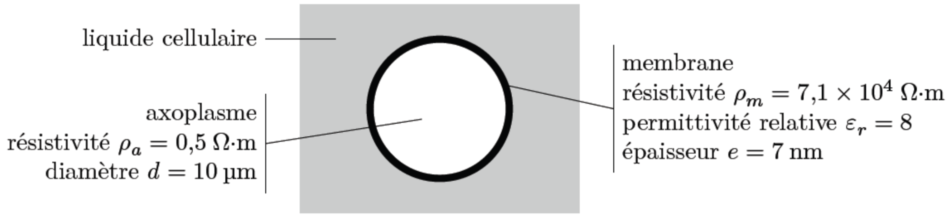

Figure 3 Vue en coupe schématisée d'un axone

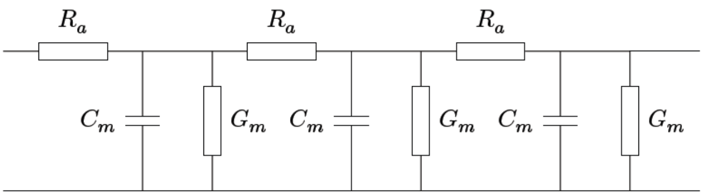

Figure 4 Circuit électrique équivalent de l'axone

Ainsi un axone peut être assimilé à un câble électrique imparfaitement isolé.

IV.A.1) Déterminer r_a, la résistance électrique par unité de longueur de l'axoplasme. Effectuer l'application numérique.

IV.A.2) Quelle hypothèse peut-on faire quant au calcul de la capacité par unité de longueur c_m et de la conductance de fuite par unité de longueur g_m au vu de la valeur du rapport e/d ?

IV.A.3) Déterminer c_m (on remplacera ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ dans les calculs) et g_m. Effectuer les applications numériques.

IV.B – Constante d'espace

Chaque longueur élémentaire de longueur dx de la fibre nerveuse est modélisée par une cellule représentée figure 5.

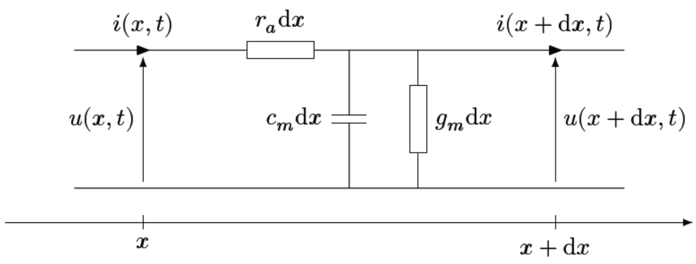

Figure 5 Schéma électrique élémentaire d'une fibre nerveuse

IV.B.1) Que devient ce schéma en régime permanent ?

IV.B.2) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x)$ et $i(x)$, puis celle vérifiée par $u(x)$ seulement. Faire apparaitre une constante λ, appelée constante d'espace, homogène à une distance. Donner l'expression de λ. Effectuer l'application numérique.

IV.B.3) Exprimer $u(x)$ en fonction de $u(0)$ et de λ. Préciser la signification physique de λ.

IV.B.4) Certains axones sont entourés d'une gaine de myéline, sorte de graisse aux propriétés électriques isolantes. Des mesures de tension électrique peuvent être effectuées le long de telles fibres. On obtient des résultats du type de ceux présentés figure 6.

En déduire la conductance linéique de fuite de l'axone myélinisé (que l'on notera g'_m par la suite), puis la conductance linéique de la gaine de myéline seule. Conclure.

IV.C – Régime variable

On se place en régime dépendant du temps et on supposera que les axones sont myélinisés. On supposera dans un premier temps que la capacité linéique par unité de longueur de l'axone est inchangée par rapport à un axone non myélinisé.

IV.C.1) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$ puis celle vérifiée par $u(x,t)$ seulement.

On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane progressive monochromatique $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$.

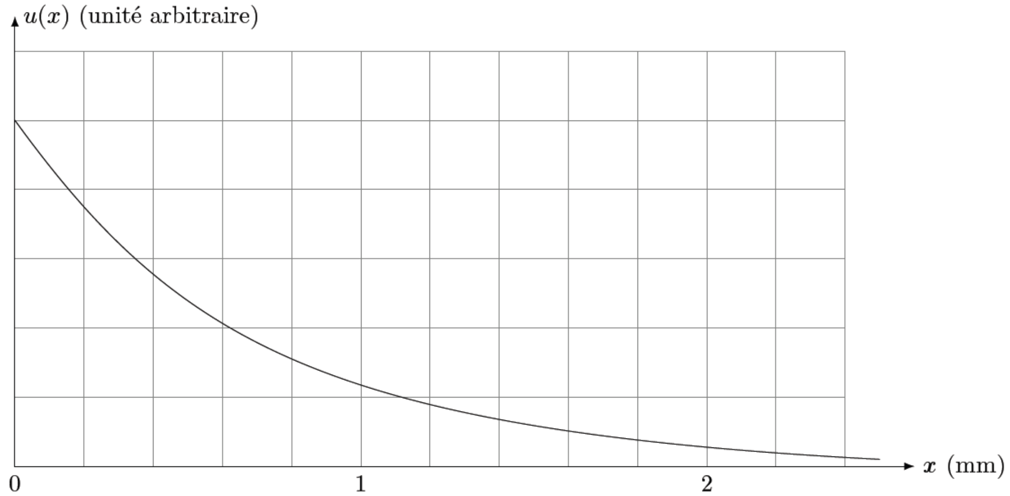

Figure 6 Évolution de la tension le long d'un axone myélinisé

IV.C.2) À quelle condition sur ω, c_m et g'_m l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie-t-elle en $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \dfrac{\partial u}{\partial t}$? À quelles fréquences cela correspond-il ? Conclure.

On supposera cette condition vérifiée par la suite.

IV.C.3) Quel est le phénomène décrit par cette équation ? Citer d'autres exemples analogues.

IV.C.4) Déterminer la relation de dispersion entre ω et k. Montrer que le milieu est dispersif et absorbant. Que valent les vitesses de phase et de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

IV.C.5) Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Commenter.