Etude d'un hacheur

MINES PSI.

(1)

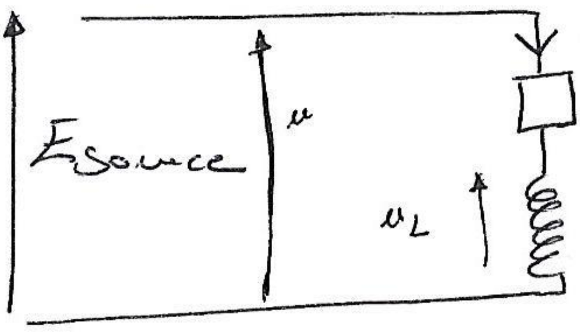
(6) * (1) Si $v_S = +V_{sat}$, $V_e - V_E = 0$, K_1 fermé

$u(t) = E_S$, la diode est montée en inverse, elle est donc bloquée car $u_D = -E < 0$.

* (2) Si $v_S = -V_{sat}$, $i_T = 0$, K ouvert, l'énergie emmagasinée dans la bobine est "libérée" dans le circuit ; $i(t) = i_D > 0$

* (1)

$u = E$

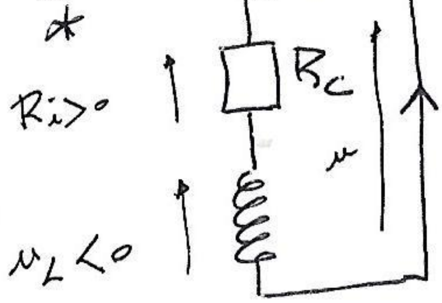


$i(t) > 0$: La bobine stocke de l'énergie

donc $i \nearrow$ $\left(L_c \frac{di}{dt} > 0\right)$

* (2)

$u = 0$



$i(t) > 0$: La bobine restitue l'énergie donc $i \searrow$ stockée. $u_L = L_c \frac{di}{dt} < 0$.

Ici $u(t) = 0$.

Au final $\underline{\langle u \rangle = \alpha E_{source}}$.

(7) Quelle que soit la phase étudiée, 2

$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$, donc en

$\langle\ \rangle$: $\langle u \rangle = R\langle i \rangle + L\langle \frac{di}{dt} \rangle$

or $\langle \frac{di}{dt} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{di}{dt}\right) dt = 0$.

et $\langle i \rangle = \frac{\alpha E}{R_c}$

(8) 1* de 0 à αT, L_c emmagasine de l'énergie, donc $\frac{dE_m}{dt} > 0$ soit

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_c i^2\right) > 0$, or $i > 0$, donc $i \nearrow$

2* de αT à T, $i \searrow$ pour les mêmes raisons. Donc

$I_{min} = i(T)$; $I_{max} = i(\alpha T)$.

Étudions les 2 régimes.

1* $[0, \alpha T]$, $E = R_c i + L_c \frac{di}{dt}$

$i = \frac{E}{R} + Ce^{-t/\tau_c}$ avec $\tau_c = \frac{L_c}{R_c}$.

On a $t = 0$, $i = I_{min}$, d'où

$\lambda = I_{min} - E/R_c$ et

$$\underline{i(t) = (E/R) + (I_{min} - E/R)\, e^{-t/\tau_c}}$$

2
* $[\alpha T, T]$, $0 = R_c i + L_c \, di/dt$

Soit avec $i(\alpha T) = I_{max}$:

$$\underline{i(t) = I_{max}\, e^{-\left(\frac{t - \alpha T}{\tau_c}\right)}}$$

Or, en αT, i est continue (bobine)

d'où $I_{max} = \left(I_{min} - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{\alpha T}{\tau_c}} + \frac{E}{R}$

et $i(0) = i(T)$ par périodicité de $i(t)$, d'où $I_{min} = I_{max}\, e^{-\frac{T}{\tau_c}(1-\alpha)}$

En combinant ces 2 équations,

$$\underline{\underline{I_{max}}} = \frac{E}{R} \, \frac{1 - e^{-\alpha T/\tau_c}}{1 - e^{-T/\tau_c}}$$

$$\underline{\underline{I_{min}}} = \frac{E}{R} \, \frac{1 - e^{-\frac{\alpha T}{\tau_c}}}{1 - e^{-T/\tau_c}} \, e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau_c}}$$

9) Pour obtenir des valeurs $\neq$ de I_M et I_m, il faut pousser le DL des exponentielles à l'ordre 2. Le calcul est en page 4 bis. On obtient

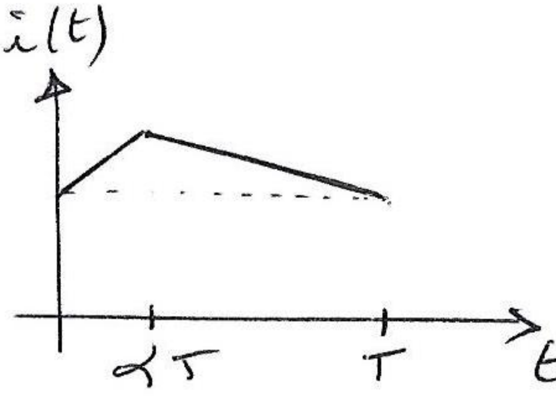
$$I_M = \frac{\alpha E}{R}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}(1-\alpha)\right) \text{ et } I_m = \frac{\alpha E}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}(1-\alpha\right.$$

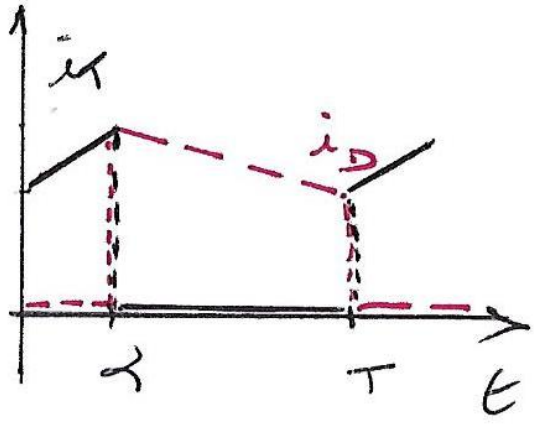
D'où $I_{max} - I_{min} = \Delta I = \alpha(1-\alpha)\frac{TE}{L}$

ou encore $\Delta I = \frac{\alpha(1-\alpha)E}{Lf}$.

10) $I_{max} = 0{,}752\ A$; $I_{min} = 0{,}748\ A$

$\Delta I = 4\,10^{-3}\ A$; $\langle i \rangle = 0{,}75\ A$.





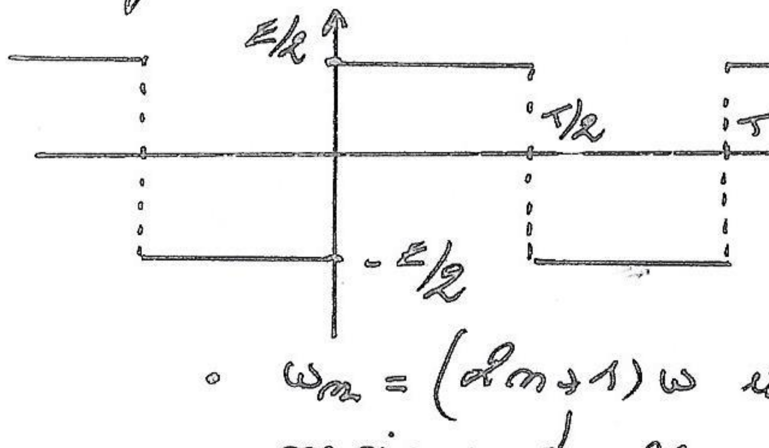
Tracés avec $T \ll \tau_c$ (d'où les allures de droites).

Etude d'un hacheur

Corrigé - suite

11. • $\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$ est la valeur moyenne du signal $u(t)$, qui correspond à sa composante continue.

• $f(t) = \frac{2E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n+1)}\sin[(2n+1)\omega t]\right\}$ est une fonction créneau impaire d'amplitude $E/2$:



et de plus

$\langle u \rangle = \langle E = \frac{E}{2}$

• $\omega_n = (2n+1)\omega$ est la pulsation de l'harmonique de rang n.

12. Pour la pulsation ω_n, $\underline{u}_n = (R_c + jL_c\omega_n)\underline{i}_n$

Soit $|\underline{i}|_n = \frac{|\underline{u}|_n}{\sqrt{R_c^2 + (L_c\omega_n)^2}}$

et $\arg(\underline{i}_n) = -\arctan\left(\frac{L_c\omega_n}{R_c}\right) = \varphi_n$.

$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)$; si $\frac{\omega_n}{\omega_0} \gg 1$, $\varphi_n \to -\pi/2$

Sachant que $\langle i \rangle = \frac{\alpha E}{R_C} = \frac{E}{2R_C}$ et par linéarité, on obtient : ⑥

$$i(t) = \frac{E}{2R_C} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2E}{\pi} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{\sqrt{R_C^2 + (L_C\omega_n)^2}} \sin[(2n+1)\omega t + \varphi_n]$$

soit avec $\omega_0 = R_C/L_C$,

$$i(t) = \frac{E}{2R_C}\left\{1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^2}} \sin[(2n+1)\omega t + \varphi_n]\right\}$$

Les coefficients de $i(t)$ décroissent plus vite avec n que ceux de $u(t)$.

Ici $\omega_0 = \frac{10}{1} = 10$ rad s-1 et $\omega = 2\pi 10^3$ rad s-1

donc $\forall n$, $\frac{\omega_n}{\omega_0} \gg 1$ d'où a_{in} coefficient de $i(t)$ est de la forme

$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 630.$

$$a_{in} = \frac{2E}{\pi R_C} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_n} \text{ et } \varphi_n = -\pi/2.$$

$\omega_n = (2n+1)\omega$

$$a_{in} = \frac{2E}{\pi R_C} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{2E}{\pi L_C} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{(2n+1)\omega}$$

Donc $i(t)$ est une fonction triangulaire : c'est $\frac{1}{L}\int u\,dt$.

13. $I_1 = \frac{2E}{\pi R_C} \frac{\omega_0}{\omega} = 1{,}5\ 10^{-3}$ A

$\langle i \rangle = 0{,}75$ A

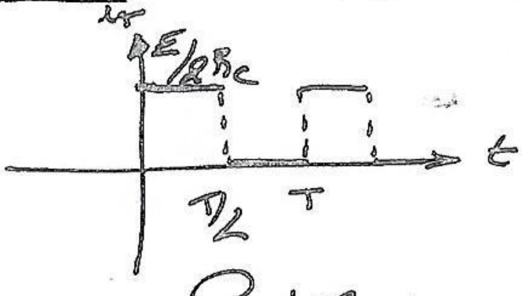
$I_2 = \frac{2E}{\pi R_C} \cdot \frac{1}{9} \frac{\omega_0}{\omega} = 1{,}7\ 10^{-4}$ A

14. • L'ondulation est quasiment égale à I_1 (7)
donc proportionnelle à $\frac{1}{\omega}$ c'est à dire à $\frac{T}{2\pi}$ donc à T (R: même si on prend $I_2, I_3, \ldots$, avec $\omega_0 \ll \omega$ on a bien toujours qq chose de $\propto$ à T).

• en 9°) $\Delta I = \frac{1}{4}\frac{ET}{L_c}$; si on prend ici
$\Delta I = 2I_1 = \frac{4E}{\pi R_c}\frac{R_c/L_c}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2E}{\pi^2}\frac{T}{L_c}$ on a bien quasiment la même chose car $2/\pi^2 \simeq 0{,}2$ et $1/4 = 0{,}25$

15. $i(t) = \langle i \rangle = \frac{E}{2R_c}$.

* $\underline{\mathcal{P}_{reçue}} = \langle u i \rangle = \langle u \rangle \frac{E}{2R_c} = \underline{\frac{1}{4}\frac{E^2}{R_c}}$ car $\langle u \rangle = \alpha E$ soit $\langle u \rangle = E/2$
* $\underline{\mathcal{P}_{délivrée}} = \langle E i_T \rangle = E\langle i_T \rangle = \underline{E \cdot \frac{1}{4}\frac{E}{R_c}}$, en effet



donc $\underline{\langle i_T \rangle} = \frac{1}{2}\frac{E}{2R_c} = \underline{\frac{E}{4R_c}}$.

$\mathcal{P}_{délivrée} = \mathcal{P}_{reçue}$ et $\eta = 1$.

page 4bis

$$I_M = \frac{E}{R}\,\frac{1-\left(1-\frac{\alpha T}{\tau_c}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 T^2}{\tau_c^2}\right)}{1-\left(1-\frac{T}{\tau_c}+\frac{1}{2}\frac{T^2}{\tau_c^2}\right)}$$

$$I_M = \frac{E}{R}\,\frac{\frac{\alpha T}{\tau_c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\alpha T}{\tau_c}\right)}{\frac{T}{\tau_c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}\right)}$$

$$I_M = \alpha\frac{E}{R}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\alpha T}{\tau_c}\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}\right)$$

$$\underline{I_M = \frac{\alpha E}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}(1-\alpha)\right)}$$

$$I_m = \frac{E}{R}\,\frac{-e^{-T/\tau_c}+e^{-\frac{T(1-\alpha)}{\tau_c}}}{1-e^{-T/\tau_c}}$$

$$I_m = \frac{E}{R}\,\frac{-\left[1-\frac{T}{\tau_c}+\frac{1}{2}\frac{T^2}{\tau_c^2}\right]+\left[1-\frac{T(1-\alpha)}{\tau_c}+\frac{T^2(1-\alpha)^2}{2\tau_c^2}\right]}{1-\left(1-\frac{T}{\tau_c}+\frac{1}{2}\frac{T^2}{\tau_c^2}\right)}$$

$$I_m = \frac{E}{R}\,\frac{\alpha\frac{T}{\tau_c}+\frac{T^2}{2\tau_c^2}\alpha(\alpha-2)}{\frac{T}{\tau_c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}\right)}$$ après développement et mise en facteur.

$$I_m = \alpha\frac{E}{R}\,\frac{1+\frac{T}{2\tau_c}(\alpha-2)}{1-\frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}}$$; avec le même DL que pour I_M :

$$\underline{I_m = \frac{\alpha E}{R}\left(1-\frac{1}{2}\frac{T}{\tau_c}(1-\alpha)\right)}$$

Etude d'un onduleur. (1)

I.1.1. Voir tracé en annexe.

I.1.2. Par définition :

$$V_{eff} = \sqrt{\langle v_{MN}^2(t)\rangle} \; ; \text{ ici } V_{eff} = U_B .$$

I.2.1. La forme de $v_{MN}(t)$ montre que la fonction est impaire ; la série est donc une série de sinus.

I.2.2. Comme $v_1(t) = \frac{4U_B}{\pi} \sin \omega t$ a une valeur efficace $V_1 = \frac{4U_B}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$U_B = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot 115 = 130\,V \text{ environ}.$$

I.2.3. $$\delta_g^2 = \frac{\sum_2^\infty V_n^2}{V_1^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2 - V_1^2}{V_1^2} \text{, or}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2 = \left(\frac{4U_B}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2 = V_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = V_1^2 \frac{\pi^2}{8} .$$

D'où :

$$d_g^2 = \frac{\pi^2 - 8}{8} \text{ et } d_g = \sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{8}}$$ ②

$d_g \simeq 48\%$.

I.3.1. • Entre 0 et $T/2$, K_3 est fermé et K_4 ouvert

{ quand K_1 est fermé, K_2 est ouvert et $v_{MN} = U_B$
{ quand K_1 est ouvert, K_2 est fermé et $v_{MN} = 0$

• Entre 0 et $T/2$, K_4 est fermé et K_3 ouvert

{ qd K_1 est ouvert, K_2 est fermé et $v_{MN} = -U_B$
{ qd K_1 est fermé, K_2 est ouvert et $v_{MN} = 0$.

D'où le tracé sur le doc 2b.

I.3.2. v_{MN}^2 est nul ou vaut U_B^2. L'intervalle de temps sur lequel v_{MN}^2 vaut U_B^2 est :

$$\Delta t = 4T\left[\frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \pm (\alpha_4 - \alpha_3) \pm (90 - \alpha_5)}{360}\right] = \frac{232}{360} T$$

D'où $$\langle v_{MN}^2 \rangle = \frac{1}{T} \cdot U_B^2 \cdot \Delta t = \frac{232}{360} U_B^2$$

et $$V_{MN\,eff} = 0{,}8\, U_B = 104\,V$$

I.3.3. ① $B_n = \frac{1}{T}\int_0^T v_{MN}(t) \sin(n\omega t)\, dt$. Il suffit de distinguer sur une période les intervalles de temps où $v_{MN} = \pm U_B$ de ceux où $v_{MN} = 0$ et de calculer les différentes intégrales.

(2) • Une acquisition grâce à un interfaçage avec un ordinateur permet de calculer la FFT du signal acquis (Carte SYSAM + Latis pro) (3)

• On utilise un filtre à fréquence d'accord réglable pour réaliser l'analyse harmonique du signal (filtre à capacités commutées : cf. TP).

I.3.4. • $d_g = 43\% \gtrsim d_{g(2)}$: le fait de couper 5 termes sur une infinité ne suffit pas (en tout cas pas forcément, voir le cours de Maths) à rendre faible la somme restante $\sum_{n=13}^{\infty} V_n^2$.

• Le filtre permettra de sélectionner ω avec un gain de 0 dB en atténuant fortement les termes de rang supérieur ou égal à 13. Sinon (2) les termes de rang 3, 5, 7 risquent de ne pas être assez atténués et de "polluer" le terme en $\sin \omega t$.

II) (1) Calculons $\underline{H} = \dfrac{\dfrac{1}{1/R + jC\omega}}{\dfrac{1}{1/R + jC\omega} + jL\omega}$, soit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}.$$ On reconnaît

un passe-bas du second ordre de pulsation de coupure $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et de facteur de qualité $Q = \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{C}$. AN : $\begin{cases} \omega_0 = 9834 \text{ rad s}^{-1} \\ Q = 2,8 \end{cases}$ 4

$\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Pour $f = 400\,Hz$, $\omega = 2513 \text{ rad s}^{-1}$ et

$|\underline{H}|_{400} = 1,06 = \dfrac{V_{S1}}{V_1}$. Or $V_1 = \dfrac{4 V_B \cdot 0,802}{\pi\sqrt{2}}$ d'où

on tire 2 : $\underline{U_B = \dfrac{115 \cdot \pi\sqrt{2}}{1,064 \cdot 0,802} \simeq 150\,V}$

3 Faisons le calcul pour $n = 13$.

$x_{13} = \dfrac{13 \times 400}{\omega_0 / 2\pi} = 3,32$ d'où $\underline{|\underline{H}| \simeq \frac{1}{10}}$ ce qui convient car $\left|\dfrac{V_{Sn}}{V_n}\right|$ décroît avec n.

4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} V_{Sn}^2 = \sum_{n=13}^{\infty} V_{Sn}^2 < \frac{1}{100} \sum_{n=13}^{\infty} V_n^2$; or

$\displaystyle\sum_{n=13}^{\infty} V_n^2 < \sum_{n=2}^{\infty} V_n^2$. Donc $\displaystyle\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_{Sn}^2} < \frac{1}{10}\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}$

D'où $dg_{3} < \frac{1}{10} dg_{2} = 0,049 < 0,05$. Ainsi

$\underline{dg_{3} < 5\%}$.

5 • $p_{\text{charge}}(t) = v_S(t) \cdot i_R(t) = \dfrac{v_S^2}{R}$

Soit $\langle P \rangle = \dfrac{\langle v_S^2 \rangle}{R} = \dfrac{V_{\text{eff}\,v_S}^2}{R}$

Soit comme $V_{S_{MN}} \simeq V_{1S} = 115\,V$ (5)

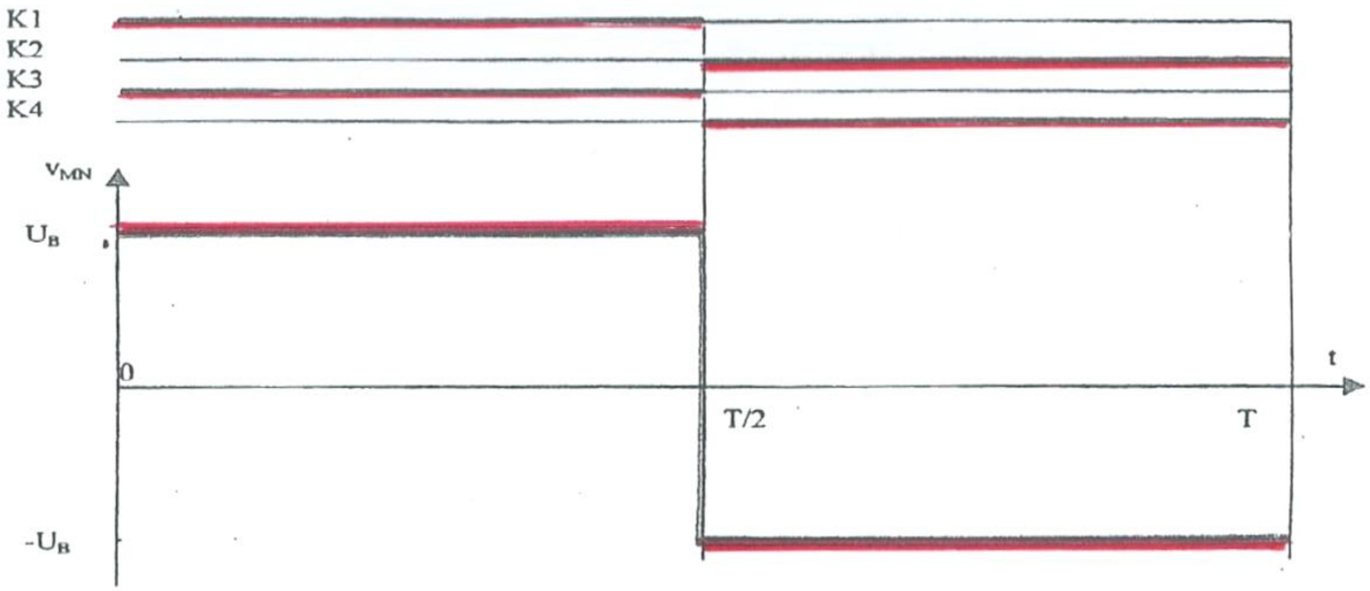
$\langle P \rangle = 1017\ W$, ce qui correspond au cahier des charges puisque $P_S = 1\,kVA$.

- La charge étant purement résistive, $\cos\varphi = 1$.

(6) Pour une puissance moyenne fournie de 1kVA sous 115 V, la batterie de 40 Ah fonctionnera pendant Δt / $\Delta t = \frac{40 \cdot 115}{1000}$, $\Delta t \simeq 4{,}6$ heures.

DOCUMENT REPONSE N°2a

Les parties en traits épais correspondent à l'état fermé des interrupteurs.
Les parties en traits fins correspondent à l'état ouvert des interrupteurs.



DOCUMENT REPONSE N°2b