PSI* 2023 - 2024
TD N° 7 - Dynamique des fluides

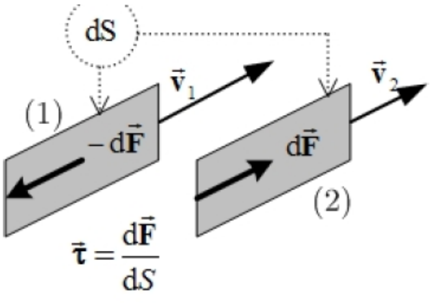
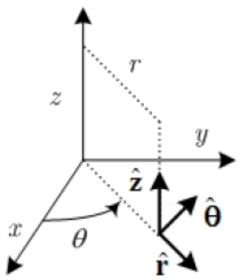


Fig. 4 – Forces agissant sur deux couches voisines.

Définitions, formulaire et hypothèses générales

Contrainte de cisaillement

Certaines distributions de forces dans un milieu déformable engendrent un mouvement laminaire de cisaillement. Au cours d'un tel mouvement, le matériau présente une structure en lamelles, en couches adjacentes. La déformation s'effectue par glissement relatif des différentes couches, sans transfert de matière d'une couche à l'autre. Au cours d'un mouvement laminaire de cisaillement, deux couches adjacentes se déplacent l'une par rapport à l'autre. Des forces tangentielles de frottement, les forces de cisaillement (Fig. 4) apparaissent à l'interface de ces deux couches. Si la couche (1) est animée d'une vitesse supérieure à celle de la couche (2), (1) exerce sur (2) une force de cisaillement $\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}$ parallèle au mouvement et tendant à accélérer (2). La couche (2) exerce pour sa part sur (1), la force de cisaillement $-\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}$ tendant à la freiner. La contrainte de cisaillement $\vec{\tau}$ est définie dans la Fig. 4.



Coordonnées cylindriques

Formulaire (coordonnées cylindriques)

Si $\vec{\mathbf{A}} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$, alors

$$\operatorname{div}\left(\vec{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\left[f\left(r,\theta,z\right)\right] = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}.$$

Hypothèses générales

On étudie l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de rayon R et de longueur L. Le problème est invariant en θ. La masse volumique du fluide est notée μ, le champ de pression au sein du fluide $P(r,z)$ et le champ de vitesse $\vec{\mathbf{u}} = u(r,z)\hat{\mathbf{z}}$. La vitesse est maximale sur l'axe du cylindre et nulle sur la paroi : $u(0,z) \geq u(r,z)$ et $u(R,z) = 0$. La vitesse de cisaillement est, par définition (et par convention de notation) en rhéologie, la quantité positive $\dot{\gamma} = -\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$. Le fluide est dit de Bingham lorsqu'il obéit à la loi de comportement à seuil τ_s

$$\text{Pour } \tau > \tau_s,\ \tau = \tau_s + \eta_p\dot{\gamma} \text{ et pour } \tau \leq \tau_s\ \ \dot{\gamma} = 0.$$

On admet enfin que le fluide étudié obéit à l'équation suivante, analogue à l'équation d'Euler pour le fluide parfait :

$$\mu\left[\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + \left(\vec{\mathbf{u}}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}\right)\vec{\mathbf{u}}\right] = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\left(P\right) - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\tau\right)}{\partial r}\right]\hat{\mathbf{z}},$$

avec la conservation de la masse $\operatorname{div}\left(\mu\vec{\mathbf{u}}\right) + \dfrac{\partial\mu}{\partial t} = 0.$

❑ **18** – Quelle est la dimension de $\dot{\gamma}$ (ce n'est pas celle d'une vitesse !) ? Vérifier que la dimension de la constante η_p est celle d'une viscosité.

❑ **19** – Montrer que $\vec{u}$ ne dépend que de la coordonnée radiale r. La loi de comportement montre alors qu'il en va de même pour τ.

❑ **20** – Montrer que P ne dépend que de z et que $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r\tau)}{\mathrm{d}r}$.

❑ **21** – On note $P(0) = P_e$ la pression du fluide à l'entrée du tuyau, $P(L) = P_s$ la pression en sortie et $\Delta P = P_e - P_s$ la chute de pression, une grandeur évidemment positive. Établir la relation $\dfrac{\Delta P}{L} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r\tau)}{\mathrm{d}r}$.

❑ **22** – En déduire l'expression de la contrainte $\tau(r) = \dfrac{r}{2L}\Delta P$; la relation $\tau(r) = \tau_s \dfrac{r}{R_0}$ définit le rayon de seuil $R_0 = \dfrac{2\tau_s L}{\Delta P}$.

❑**23** – Le rayon R est donné. Montrer que les solutions pour lesquelles $R_0 > R$ correspondent à une vitesse nulle de l'écoulement. En déduire la différence de pression minimale $\Delta P_{\min}$ nécessaire à l'existence d'un débit non nul.

❑ **24** – On suppose que $R_0 < R$. Établir que la vitesse du fluide est

$$u(r) = \begin{cases} \dfrac{\Delta P}{4L\eta_p}(R - R_0)^2 & \text{pour } r \le R_0 \\ \dfrac{\Delta P}{4L\eta_p}(R + r - 2R_0)(R - r) & \text{pour } r \ge R_0 \end{cases}$$

❑ **25** – Tracer l'allure de $u(r)$ pour $0 \le r \le R$. On dit que l'écoulement présente une *zone bouchon*. D'où vient cette dénomination ?

❑ **26** – Afin de vérifier la pertinence du modèle, on mesure la chute de pression $\Delta P = P_e - P_s$ et le débit volumique $Q = \int_0^R u(r)\,2\pi r\,\mathrm{d}r$. Montrer que $Q = \int_0^R \pi r^2 \dot{\gamma}\,\mathrm{d}r$.

❑**27** – On note τ_p la contrainte à la paroi : $\tau_p = \tau(R) = \dfrac{R\Delta P}{2L}$. Démontrer la *formule de Rabinovitch* $\dfrac{Q}{\pi R^3} = \dfrac{U_d}{R} = \dfrac{1}{\tau_p^3}\int_0^{\tau_p} \tau^2 \dot{\gamma}\,\mathrm{d}\tau$, où $U_d = \dfrac{Q}{\pi R^2}$ est la *vitesse débitante*. Dans ce qui suit, cette formule est mise en œuvre pour permettre une exploitation facile des résultats expérimentaux.

❑ **28** – Appliquant cette formule à un fluide de Bingham, montrer que, en négligeant le terme d'ordre 4 en $\dfrac{\tau_s}{\tau_p}$, on obtient $\dfrac{U_d}{R} = \dfrac{R}{8L\eta_p}\left(\Delta P - \Delta P_0\right)$, où $\Delta P_0 = \dfrac{8L\tau_s}{3R}$ est la *pression différentielle critique*.

❑ **29** – Quel est l'écart minimal de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau pour que l'écoulement se produise ? Comment peut-on avoir accès expérimentalement à cette grandeur ?

❑ **30** – Au vu de la Fig. 5, le modèle de Bingham est-il fondé ?

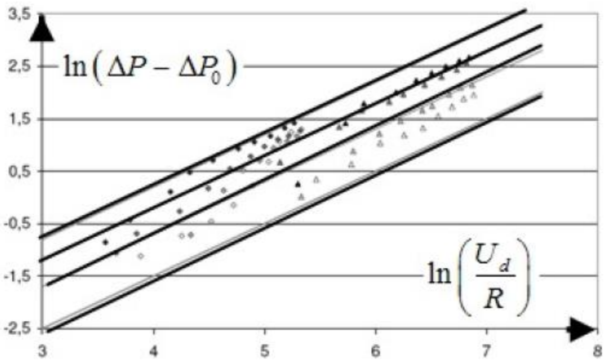


Fig. 5 – Résultats expérimentaux de la thèse de M. Darbouret (2005), pour diverses fractions volumiques de particules. Les droites sont des guides pour la modélisation.

❑ **31** – La caractérisation du fluide de Bingham exige la détermination expérimentale du seuil τ_s et de η_p. Les grandeurs mesurées sont la chute de pression ΔP et le débit volumique Q. La contrainte à la paroi $\tau_p = \dfrac{R\Delta P}{2L} = \tau_s + \eta_p \dot{\gamma}(R)$ se déduit de la mesure de ΔP. En dérivant par rapport à τ_p le logarithme de la formule de Rabinovitch $\ln\left(\dfrac{U_d}{R}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\tau_p^3}\int_0^{\tau_p} \tau^2 \dot{\gamma}\,\mathrm{d}\tau\right) = -3\ln\left(\tau_p\right) + \ln\left[\mathrm{f}\left(\tau_p\right)\right]$, où $\dot{\gamma}_p = \dot{\gamma}(R)$, établir la relation $\dot{\gamma}_p = \dfrac{U_d}{R}\left(3 + \dfrac{1}{\nu}\right)$, où $\nu = \dfrac{\mathrm{d}\ln(R\Delta P/2L)}{\mathrm{d}\ln(U_d/R)}$.