TD Physique 12 – Diffusion

EXERCICE 1 : Effet Joule et irréversibilité

Une barre conductrice calorifugée de longueur *L*, de section *S*, de résistivité électrique ρ et de conductivité thermique λ, est parcourue par un courant d'intensité *I* (uniformément réparti). On se place en régime permanent.

1) Déterminer $T(\frac{x}{L})$. Les températures imposées aux extrémités sont T_1 et T_2.

   On posera $a = (T_2 - T_1)\dfrac{2KS^2}{\rho I^2 L^2}$.

   Tracer $T(\frac{x}{L})$ pour les trois valeurs de a : 0.5, 1 et 1.5.
2) A quelle condition $T(\frac{x}{L})$ passe-t-elle par un maximum ?
3) Calculer l'entropie $\mathcal{S}_C$ créée par unité de temps et de volume dans la barre, à l'abscisse *x*.

EXERCICE 2 : Sonde de Clark

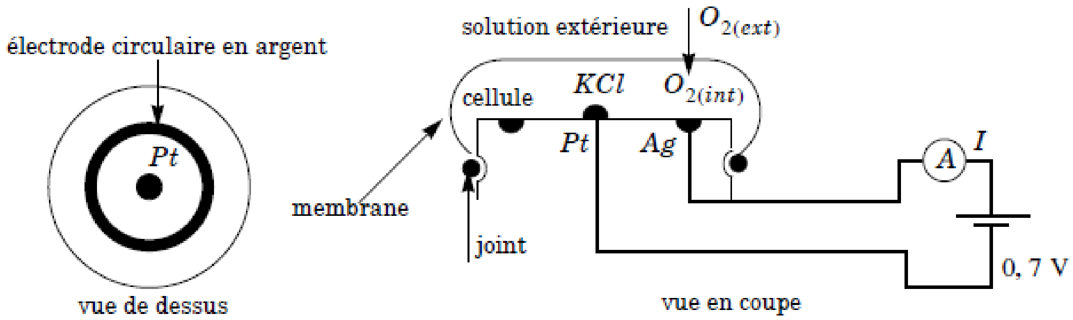
Dans cette partie, tous les calculs seront effectués à 25° C.

Données :

$$\frac{RT}{F}\ln(10) = 0,06 \text{ V}$$

Potentiel standard	$E°(Ag^+/Ag) = 0,80$ V
Produit de solubilité	$K_s(AgCl) = 2,1 \cdot 10^{-11}$
Masses molaires	K : 39 g · mol^{-1} ; Cl : 35,5 g · mol^{-1}

La sonde de Clark est très utilisée en biologie afin de mesurer la teneur en dioxygène dans le sang.



Elle est constituée d'une cellule contenant une solution non saturée de chlorure de potassium KCl à 175 g · L^{-1}, séparée d'une solution extérieure (qui peut être du sang) par une membrane de polytétrafluoroéthylène ($PTFE$). Cette membrane est imperméable au solvant et aux ions, mais elle est perméable au dioxygène. La sonde est également constituée d'une électrode d'argent et d'une électrode de platine entre lesquelles on applique une différence de potentiel de 0,7 V. La mesure de l'intensité I du courant d'électrolyse permet de déterminer la teneur en dioxygène dans la solution extérieure.

Elle est constituée d'une cellule contenant une solution non saturée de chlorure de potassium KCl à $175\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$, séparée d'une solution extérieure (qui peut être du sang) par une membrane de polytétrafluoroéthylène $(PTFE)$. Cette membrane est imperméable au solvant et aux ions, mais elle est perméable au dioxygène. La sonde est également constituée d'une électrode d'argent et d'une électrode de platine entre lesquelles on applique une différence de potentiel de $0,7\ \mathrm{V}$. La mesure de l'intensité I du courant d'électrolyse permet de déterminer la teneur en dioxygène dans la solution extérieure.

II.A.4) On s'intéresse plus particulièrement à la diffusion du dioxygène à travers la membrane. On note D le coefficient de diffusion moléculaire du dioxygène à travers la membrane, et K la constante de solubilité de O_2 dans la membrane. Au niveau d'une interface membrane/solution, on a ainsi

$$[O_2]_{membrane} = K[O_2]_{solution} .$$

a) On note δ l'épaisseur de la membrane et S sa surface. Rappeler la loi de Fick dans le cas d'une diffusion unidirectionnelle. En déduire l'expression I_n du courant particulaire dans le membrane.

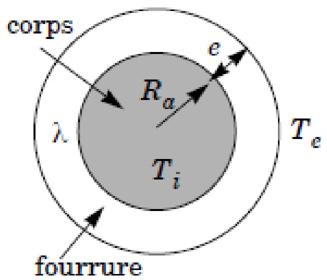
b) En supposant que la diffusion de O_2 à travers la membrane limite la cinétique de l'électrolyse, exprimer l'intensité électrique d'électrolyse I en fonction notamment des concentrations molaires en O_2 dans la solution extérieure et dans la cellule, notées respectivement $[O_2]_{ext}$ et $[O_2]_{int}$.

c) L'intensité d'électrolyse est maximale pour $[O_2]_{int} = 0$. En déduire comment la mesure de I_{max} permet de connaître la teneur en O_2 dans la solution extérieure.

EXERCICE 3 : Un mammifère terrestre

Le plus petit mammifère terrestre vivant en milieu tempéré est la *musaraigne pachyure étrusque* ; il ne pèse que deux grammes.

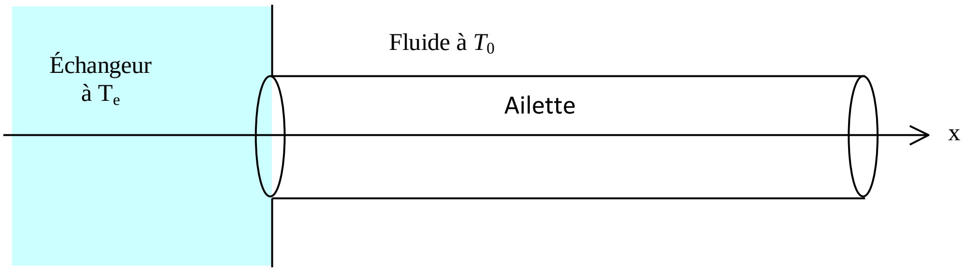
On modélise le corps de l'animal par une sphère homogène de rayon R_a et de masse volumique $\mu \approx 1\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, de température $T_i = 37°\ \mathrm{C}$. Autour de cette sphère, on considère que l'animal possède une fourrure d'épaisseur e, de masse négligeable, de conductivité thermique proche de celle de l'air $\lambda \approx 10^{-2}\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$. On prendra pour la température extérieure $T_e = 20°\ \mathrm{C}$.



En régime stationnaire, exprimer la puissance thermique P dégagée par l'animal en fonction de λ, T_e, T_i, R_a, e (on ne fera pas l'approximation $e \ll R_a$).

EXERCICE 4 : Ailette de refroidissement

Une tige pleine, cylindrique, d'axe *Ox*, de longueur « infinie », de section droite de rayon *a*, est en contact par une de ses extrémités avec un échangeur à la température T_e et par sa surface latérale avec un fluide à la température constante T_0. Elle joue le rôle d'ailette de refroidissement.



A l'intérieur de la tige :

. on supposera le gradient radial de température suffisamment faible pour que dans la section droite d'abscisse x la température $T(x,t)$ soit uniforme ;

. on posera $T_d(x,t) = T(x,t) - T_0$;

. on notera $q(x,t)$ le flux thermique à travers la section droite d'abscisse x ;

. on notera h le coefficient de transfert thermique à la surface latérale correspondant au transfert conducto-convectif (loi de Newton) ;

. on appellera μ la masse volumique de la tige, c sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique.

L'échangeur réalise une excitation thermique sinusoïdale de l'extrémité de la tige selon la loi $T_e = T_0 + (T_1 - T_0)\cos\omega t$.

1) Établir les équations en $q(x,t)$ et $T_d(x,t)$ résultant de l'application de la loi de Fourier et du bilan énergétique de l'élément de tige compris entre x et $x + dx$.
2) Donner l'expression des deux équations précédentes en notation complexe. On posera $\underline{T}_d(x,t) = \underline{T}_d(x)\exp(i\omega t)$ et $\underline{q}(x,t) = \underline{q}(x)\exp(i\omega t)$.
3) Établir l'équation différentielle en $\underline{T}_d(x)$.
4) Vérifier que $\underline{T}_d(x) = \underline{T}_d(0)\exp\left(-\left(k_1 + ik_2\right)x\right)$ est solution à condition que les constantes k_1 et k_2 soient solutions de l'équation :

$$\left(k_1 + ik_2\right)^2 - \left(2\alpha^2 + 2i\beta\right) = 0 \text{ où } \alpha = \sqrt{\frac{2h}{a\lambda}} \text{ et } \beta = \frac{\omega\mu c}{2\lambda}.$$

Vérifier la cohérence et donner l'interprétation physique de la solution obtenue :

$$T_d(x,t) = \left(T_1 - T_0\right)e^{-k_1 x}\cos\left(\omega t - k_2 x\right)$$

EXERCICE 5 : Dopage d'un semi-conducteur

Pour illustrer la diffusion, considérons la situation expérimentale du dopage d'un semi-conducteur d'arséniure de gallium (AsGa) avec du silicium. A l'instant $t = 0$, N_0 atomes de silicium par unité de surface sont *brusquement introduits en $x = 0$, à la surface d'une plaquette d'AsGa considérée comme un milieu semi-infini. L'analyse du régime instationnaire montre que le nombre d'atomes de silicium $N(x,t)$ par unité de volume à l'abscisse x et à l'instant t s'écrit :*

$$N(x,t) = \frac{K}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right).$$

A7. Etablir la relation entre a et D, pour que la répartition d'atomes N(x,t) soit solution de l'équation de diffusion établie en A3. Traduire la conservation du nombre d'atomes introduits et, par le changement de variable $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ se référant aux compléments mathématiques en fin d'épreuve, déterminer la valeur de K en fonction de N_0 et D.

Le schéma ci-dessous (<u>Figure 1</u>) traduit le résultat du dopage de la plaquette d'AsGa : l'évolution de la distribution des atomes de silicium est tracée en fonction de l'abscisse x, à différents instants.

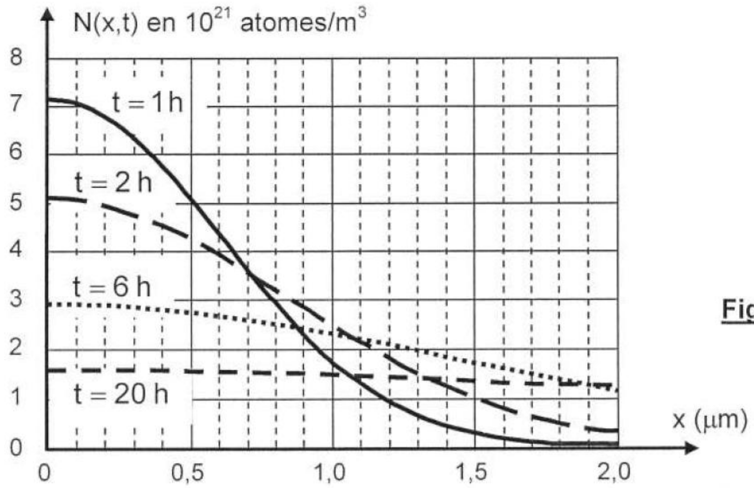


Figure 1

A8. Analyser la forme des courbes obtenues. Que vaut l'aire sous chacune de ces courbes ? Déterminer, à un instant t donné (en adoptant par exemple $t = 1\,h$), la profondeur d'implantation L des atomes de silicium correspondant à une concentration moitié de la concentration en $x = 0$ (il s'agit de la demi-largeur à mi-hauteur).

A9. Proposer un mode de détermination du coefficient de diffusion D du silicium dans AsGa. Estimer l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion D.

- *Définition de la **fonction erreur** (error function) :* $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp(-s^2)\, ds$

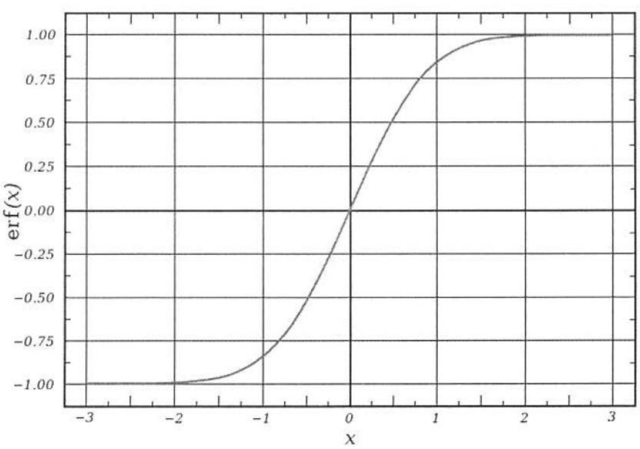
- *Propriétés de erf(x) :*

$$\operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x) \qquad \operatorname{erf}(0) = 0 \qquad \operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-s^2)\, ds$$

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{erf}(x)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$$

- *Représentation de la fonction erreur :*



- *Intégrale d'Euler :* $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-s^2)\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$