PSI* 2018 – 2019
TD N°10 – Diffusion

I. Diffusion dans un fil métallique

Considérons un fil métallique cylindrique, homogène, de section droite S dont le périmètre vaut p et de longueur L. Le rayon de ce fil est supposé petit par rapport à sa longueur.

Le métal constitutif possède une conductivité thermique λ, une résistivité électrique ρ, une masse volumique μ et une capacité thermique massique C.

Dans la première partie de l'étude, les parois latérales du fil sont parfaitement calorifugées et les extrémités sont maintenues à des températures T_1 et T_2 (avec $T_1 > T_2$) grâce à des thermostats. La température T(x) dans le fil ne dépend que de l'abscisse x (Figure 5a), avec $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$.

Toute l'étude est réalisée en régime permanent.

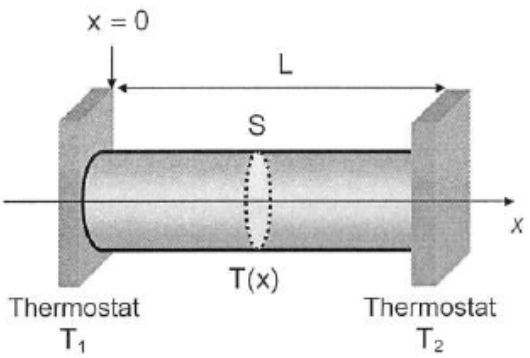


Figure 5a

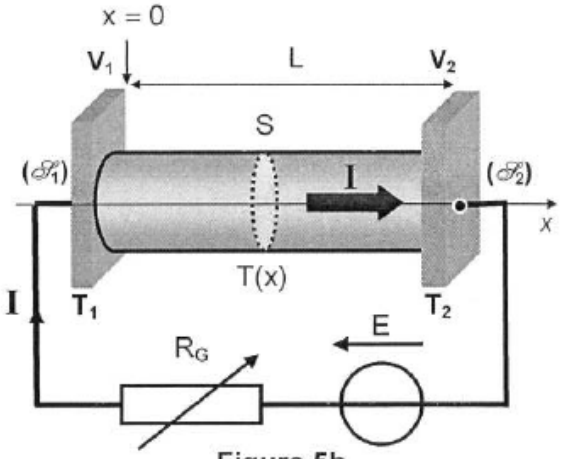


Figure 5b

D1. Rappeler la loi de Fourier pour une densité volumique de courant thermique notée $\vec{j}_{th}$; exprimer le flux (ou puissance) thermique Φ_{th} traversant une section droite S du fil.

D2. Etablir, à l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche élémentaire du fil de section S et de longueur dx, l'équation différentielle vérifiée par la température T(x).
En déduire la loi de répartition de T(x) en fonction de T_1, T_2, L et x.
Tracer schématiquement cette répartition de température en fonction de x.

D3. Exprimer la puissance thermique Φ_2 cédée à la source de température T_2 en fonction de λ, S, T_1, T_2 et L.

Le fil est maintenant parcouru par un courant électrique continu d'intensité I, répartie uniformément sur toute la section S (Figure 5b). Les sections terminales ($\mathscr{S}_1$) et ($\mathscr{S}_2$) sont maintenues simultanément à des températures constantes T_1 et T_2, et à des potentiels constants V_1 et V_2. Après établissement d'un régime stationnaire, les surfaces isothermes et équipotentielles sont des plans orthogonaux à l'axe Ox.

La résistivité électrique ρ du fil est indépendante de la température et le fil est considéré comme un conducteur ohmique ayant une résistance constante bien que la température T(x) ne soit pas uniforme. Les dimensions du fil ne varient pas avec la température.

D4. Exprimer, par application de la loi d'Ohm, la résistance dR d'une tranche élémentaire du fil, de longueur dx et de section S ; en déduire la puissance thermique volumique $\mathscr{P}_{th,V}$ produite au sein du fil, en fonction de l'intensité I, de S et ρ.

D5. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température T(x).
En déduire l'expression de T(x), puis celle de la densité volumique de courant de chaleur $j_{th}(x)$ en fonction de ρ, λ, S, T_1, T_2, L, x et I.

D6. Ecrire le courant de chaleur ou flux thermique Φ_{th} le long du fil, en notant $\mathscr{C} = \dfrac{\lambda S}{L}$ sa conductance thermique et R sa résistance électrique.
Tracer, toujours avec $T_1 > T_2$, l'allure de la répartition de température T(x) en distinguant les cas où le terme $\dfrac{1}{2}RI^2$ est inférieur ou supérieur à la quantité $\mathscr{C}(T_1 - T_2)$. Commenter.

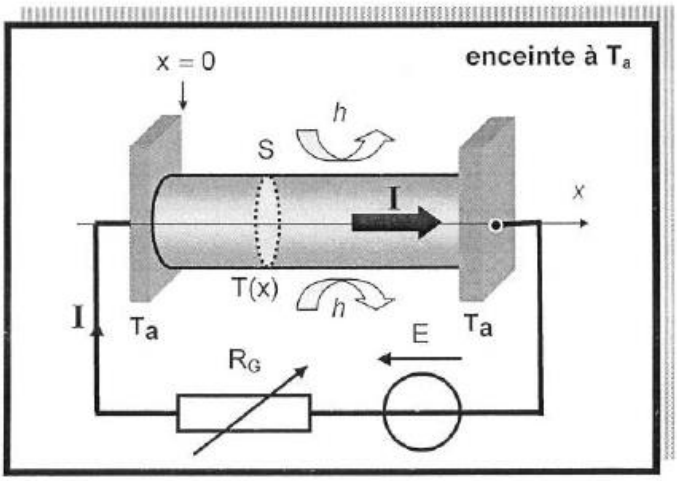
D7. Déterminer la puissance thermique Φ'_2 désormais cédée à la source de température T_2.
Interpréter physiquement le résultat obtenu.

Le dispositif précédent est maintenant placé dans une enceinte maintenue à une température uniforme T_a. Le fil est relié à deux bornes maintenues rigoureusement à la même température T_a. La capacité thermique de ces bornes est suffisamment grande pour que leurs températures restent constantes et égales à T_a. (Figure 6)

Le fil subit, à travers sa surface latérale, des pertes thermiques conducto-convectives latérales ; elles correspondent à la puissance thermique $d\Phi_{cc} = h\left[T(x) - T_a\right] d\Sigma$ cédée par le fil au milieu extérieur, h étant le coefficient d'échange et $d\Sigma$ un élément de surface latérale du fil.

Ce dispositif est destiné à un banc expérimental de mesure de la conductivité thermique du fil métallique ; afin d'améliorer la précision de la mesure, il convient de tenir compte de la variation de la résistivité électrique en fonction de la température, suivant la loi : $\rho(x) = \rho_a\left[1 + \beta\left(T(x) - T_a\right)\right]$, où ρ_a désigne la résistivité électrique à la température T_a et β une constante positive.

Figure 6



D8. Proposer, en raisonnant sur une tranche élémentaire de fil de longueur dx et de section S, un bilan des flux thermiques en présence ; en déduire l'équation différentielle vérifiée par la grandeur $\theta(x) = T(x) - T_a$, sous la forme :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + m^2\,\theta(x) = -k\,.$$

Exprimer m^2 en fonction du périmètre p de la section droite, de h, λ, ρ_a, β, S et I, puis écrire k en fonction de λ, ρ_a, S et I.

D9. Montrer que, selon la valeur de l'intensité I du courant, trois types de solutions mathématiques de $\theta(x)$ sont attendues. *(aucune résolution de l'équation différentielle n'est demandée)*

Réalisons l'expérience suivante : le fil est alimenté par un courant dont l'intensité I_0 correspond au cas particulier où $m^2 = 0$.

D10. Préciser la valeur I_0 de cette intensité en fonction de h, p, ρ_a, β et S.
Résoudre l'équation différentielle qui en résulte en établissant la loi de variation de la température $\theta(x)$.
Illustrer son évolution à l'aide d'un schéma. Analyser physiquement le résultat obtenu.

D11. Exprimer la résistance électrique R_a du fil, à la température uniforme T_a, puis celle de sa résistance R lorsqu'il est à la température T en fonction de R_a, β, k et L.

En déduire la variation relative de résistance $\delta = \dfrac{R - R_a}{R_a}$, puis l'écrire en fonction des grandeurs h, p, λ, L et S.

D12. Le coefficient d'échange h étant déterminé par ailleurs à l'aide d'une autre expérience, proposer le mode de détermination de la conductivité thermique λ du métal constituant le fil.

- *Définition de la **fonction erreur** (error function) :* $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2)\, ds$

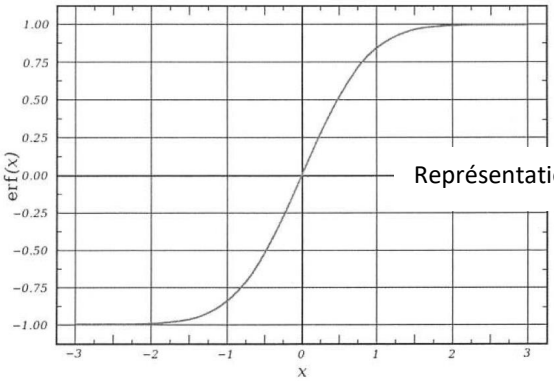
- *Propriétés de erf(x) :*

$$\operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x) \qquad \operatorname{erf}(0) = 0 \qquad \operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-s^2)\, ds$$

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{erf}(x)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$$

- *Intégrale d'Euler :* $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-s^2)\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



Représentation de la fonction erreur

II. Résolution de problème : La musaraigne étrusque

Sarcophage de musaraigne étrusque
Egypte 26ème Dynastie – 650 avant JC

Musaraigne étrusque

Le plus petit mammifère terrestre vivant en milieu tempéré est la *musaraigne étrusque.*
Sa température corporelle intérieure est T_i = 37 °C. Sa masse vaut environ deux grammes.
L'animal possède une fourrure de masse négligeable d'épaisseur e = 1 mm, de conductivité thermique λ = 0.01 W/m/K.
Donner une estimation de la puissance thermique dégagée par l'animal.