PSI 2024 – 2025*
TD N°10 – Electromagnétisme (1)
Charges et courants

EXERCICE 1 : Distributions de charges et de courants

Déterminer les symétries et les invariances spatiales des distributions statiques suivantes :

- Plan infini uniformément chargé.
- Sphère chargée en volume de densité $\rho(r)$.
- Fil infini parcouru par un courant I_0.
- Cylindre infini suivant x, de rayon a, parcouru par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\overrightarrow{e_x}$.
- Deux fils infinis parallèles parcourus respectivement par i_1 et i_2
    - Cas où i_1 et i_2 sont quelconques.
    - Cas particuliers :
        - $i_1 = i_2$
        - $i_1 = - i_2$
- Plan infini (xOy) parcouru par un courant de densité uniforme surfacique $\vec{j}_S = j_{S0}\overrightarrow{e_x}$.

Remarque importante : Si les distributions précédentes dépendaient du temps, les raisonnements et les conclusions seraient identiques.

EXERCICE 2 : Sphère radioactive

Une petite sphère radioactive de rayon a, initialement neutre, émet de façon isotrope n charges - e par unité de temps avec une vitesse radiale de norme constante : $\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_r}$.
Déterminer à l'instant t la répartition de charge et de courant dans l'espace pour r > a.

EXERCICE 3 : Conductivité d'un électrolyte

On modélise une cellule d'un conductimètre par deux électrodes planes de surface rectangulaire S d'axe Ox, comprise entre les plans d'équations $x=0$ et $x=L$, contenant une solution aqueuse de sulfate de cuivre. Cette solution contient différents types d'ions A_i de charge q_i et de masse m_i ; on note n_i le nombre d'ions A_i par unité de volume. Soit U la différence de potentiel constante entre les plans $x=0$ et $x=L$ telle que dans le cylindre règne un champ électrostatique uniforme et stationnaire $\vec{E}=\frac{U}{L}\vec{u}_x$ où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire de l'axe Ox. Les ions A_i sont alors soumis à la force électrostatique correspondante $q_i\vec{E}$ et à une force de frottement fluide de la forme $-f_i\vec{v}_i$ où $\vec{v}_i$ est leur vitesse et f_i un coefficient positif.

Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un ion A_i. Dans la suite, on se place en régime permanent ; montrer que $\vec{v}_i=\mu_i\vec{E}$ et exprimer le coefficient μ_i (mobilité de l'ion) en fonction de q_i et f_i.

Quel est le nombre dN_i d'ions A_i franchissant une section d'abscisse donnée de la cellule entre les dates t et $t+dt$? Quelle charge dQ_i transportent ces ions pendant dt ? En déduire la contribution I_i des ions A_i à l'intensité I du courant traversant la cellule en fonction de q_i, f_i, n_i, L, S et U. Vérifier que le signe de q_i n'influe pas sur le signe de l'intensité du courant.

En déduire que la résistance R du cylindre s'écrit $R=\frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}$ et donner l'expression de la conductivité σ en fonction d'abord des n_i, q_i, f_i, puis des n_i, q_i, μ_i.

EXERCICE 4 : Champ de divergence nulle – Résistance
L'espace entre deux cylindres coaxiaux d'axe Oz, de rayons R_1 et R_2, ($R_1 < R_2$) est occupé par un conducteur ohmique de conductivité γ.

La longueur des cylindres est supposée très grande devant R_1 et R_2.

On applique une différence de potentiel constante $V(R_1) - V(R_2)$ entre ces conducteurs et l'on étudie le régime permanent établi.

- Décrire les symétries de la distribution de courant dans l'espace conducteur.

- En déduire la forme du vecteur densité de courant $\vec{j}$.

- Soit I le courant qui circule entre les cylindres, exprimer le vecteur densité de courant correspondant en fonction de I, r et H, hauteur du cylindre.

- Calculer la résistance de ce conducteur entre les deux cylindres en fonction de R_1 et R_2. On rappelle le lien entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique et la loi d'Ohm locale : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.