PSI* 2014 – 2015
TD N°13
CORDE VIBRANTE

Partie I - Corde composée: conditions de passage.

On considère dans cette partie une corde composée de deux parties : l'une de masse linéique μ_1 et l'autre de masse linéique μ_2 avec $\mu_2 \neq \mu_1$.

Elles sont tendues par la même tension T et liées en O.

Les deux cordes sont suivant l'axe Ox et on ne considère pas le problème de leur point d'attache ailleurs qu'en O : elles pourront être considérées comme infinies, la première en x < 0 et la seconde en x > 0. On considère une onde incidente venant du milieu 1 et se dirigeant dans le sens des x croissants, dont on donne la représentation complexe :

$$\underline{z}_i(x,t) = \underline{A}_i \exp(j\omega[t - x/C_1])$$

On veut déterminer les ondes réfléchie et transmise à la séparation des deux milieux. Les célérités y seront C_1 et C_2.

1) Donner la représentation complexe des ondes transmise et réfléchie. On prendra $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$ comme amplitudes respectives de ces deux ondes en complexe. Pourquoi sont-elles de même pulsation que le signal incident ?

2) Donner les conditions de passage à la frontière des deux milieux en indiquant au préalable quelles grandeurs sont continues et pourquoi ?

3) Déterminer les amplitudes $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$. Définir et donner l'expression des coefficients de transmission et de réflexion en fonction des deux masses volumiques, μ_1 et μ_2. Étudier trois cas particuliers liés a des valeurs remarquables ou limites de μ_2.

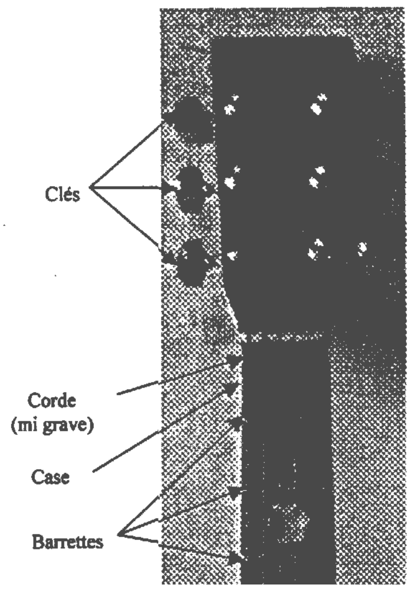
4) On considère $\underline{A}_i$= A. Exprimer les ondes réelles associées respectivement au milieu 1 et au milieu 2.
a) Dans le cas où $\mu_1 > \mu_2$, donner z(x,t) pour les deux parties de la corde sous forme d'une somme d'un terme progressif et d'un terme stationnaire (l'un des termes peut être nul) dont on précisera les amplitudes.
b) On rappelle les expressions de l'énergie linéique de la corde et du flux d'énergie :

$e = \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial z}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}T(\frac{\partial z}{\partial x})^2$ et $\Phi = -T(\frac{\partial z}{\partial t})(\frac{\partial z}{\partial x})$; d'autre part $(\frac{\partial e}{\partial t}) = -(\frac{\partial \Phi}{\partial x})$ (relation que l'on pourra montrer à titre d'exercice).

L'énergie mécanique est-elle continue au passage en O ? Donner l'expression du flux d'énergie qui s'écoule le long de la corde pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et pour l'onde transmise: Φ_i, Φ_r et Φ_t. Vérifier la conservation de l'énergie lors du passage en O.

Commenter l'expression de e et la relation liant e et Φ.

Partie II - Application aux cordes de guitare.



On va s'intéresser dans cette partie aux vibrations produites par des cordes de guitare.
On se servira des relevés faits sur la guitare photographiée ci-dessus et sur laquelle figure des éléments de vocabulaire. On considérera que les cordes sont tendues sur L = 64,25 cm.
Elles sont au nombre de six. Leur diamètre varie suivant la fréquence qui leur est associée. Les trois dernières, les plus aiguës, sont en acier de masse volumique 7800 kg.m^{-3}, de diamètre 0,30 mm, 0,50 mm et 0,70 mm.
De la plus grave à la plus aiguë, elles sont associées aux notes mi_1, la_1 ,re_2, sol_2, si_2 et mi_3 .

Précisons l'évolution des notes en fonction de la fréquence : les notes se répartissent sur une octave, c'est-à-dire un intervalle de fréquences entre f et 2f (fréquence double).

L'octave est divisée en une progression géométrique de 12 demi-tons. La succession des notes est : do, ré, mi, fa, sol, la, si, do. Les écarts entre deux notes successives est d'un ton (ou deux demi-tons) sauf entre mi et fa puis entre si et do où il n'y a qu'un seul demi-ton. La base de la gamme est le la_3 de fréquence 440 Hz que l'on obtient sur la sixième corde de la guitare. Un dièse (#) correspond à une montée d'un demi-ton (ainsi mi# est en fait un fa).

1) Déterminer la fréquence fondamentale à vide (lorsqu'elles vibrent sur toute leur longueur) et les tensions des trois cordes en acier (les plus aiguës).

2) Pour pouvoir changer la hauteur (fréquence) de la note jouée sur une corde, on a disposé des barrettes métalliques sur le manche (voir photo): on peut ainsi, en appuyant la corde à l'aide du doigt sur ce support changer la longueur de la corde. En pratique, le doigt appuie dans la case (espace entre les barrettes) précédant la barrette.

a) Pourquoi les barrettes sont-elles disposées orthogonalement au manche et donc aux cordes ?

b) Sur quelle barrette doit reposer la corde de mi_3 pour obtenir le la_3 de référence de la gamme ? A quel endroit du manche est-elle placée ?

c) Avant de jouer de l'instrument, la guitare doit être accordée. Est-ce que cet accordage doit être absolu (c'est-à-dire conforme aux fréquences données en début de partie IV) ou peut-il être relatif (une corde servant de référence et les cinq autres étant accordées sur elle) ?

3) Lorsque l'on frappe une corde ou qu'on la pince, la solution qui se développe est une somme de plusieurs des solutions de l'équation d'onde. On procède un enregistrement des sons produits par la guitare.
Le relevé 1 donné en annexe correspond à un son enregistré après avoir frappé la corde de mi, près du chevalet. Le relevé 2 est l'analyse de Fourier de ce signal.

a) Le son produit est-il “ harmonique ” ?

b) Commenter ces documents. La guitare est-elle accordée ?

4) Si un son est produit, c'est que la corde perd de l'énergie. On n'envisagera pas le couplage avec la caisse de résonance et avec l'air ambiant. Des considérations expérimentales et qualitatives sur ce phénomène, pour tenir compte de l'action de l'air, amènent, par exemple, à prendre une force de frottement fluide visqueux proportionnelle à la vitesse de la corde s'exerçant sur une longueur dx de celle-ci:

$$-\alpha dx\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

a) En quelle unité du système international s'exprime α ?

b) Donner la nouvelle équation du mouvement.

5) On propose alors de modifier les solutions du cours : donner la nouvelle équation de propagation
On pose: $z(x,t) = A.\exp(\beta t).\cos(2\pi ft).\sin(\pi x/L)$ où A et β sont des constantes.

a) Que signifie non-dissipatif ? Y a-t-il des phénomènes réels qui soient non-dissipatifs ?
Quelle loi physique est en rapport avec tout cela ?

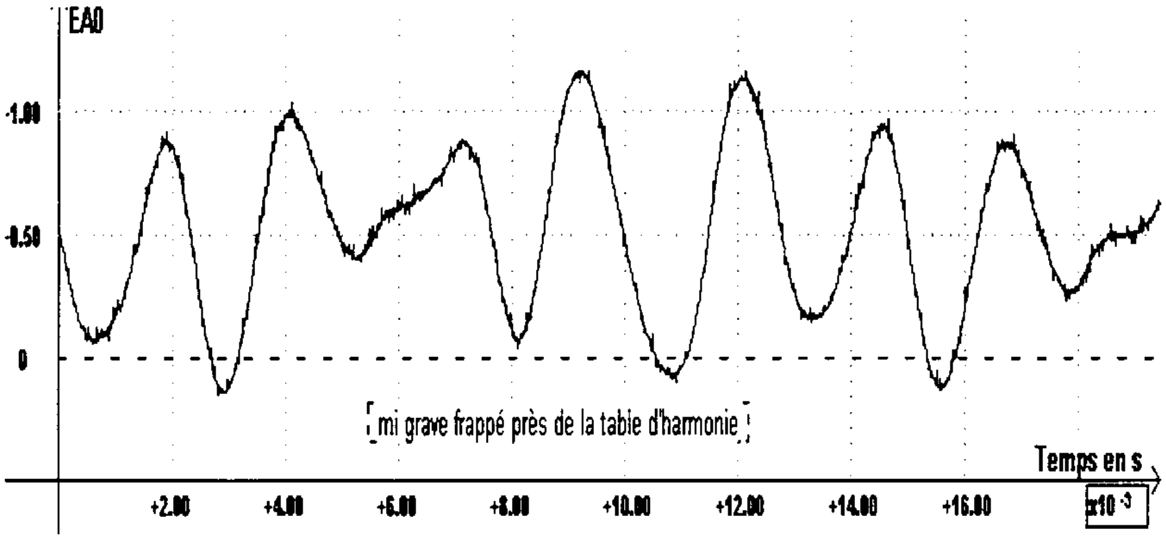
b) Déterminer β puis α. Que constate-t-on sur le signe de β ? Était-ce prévisible ? Donner α en fonction de ω ? Quelles notes persistent le plus longuement ?

6) Les cordes sont fixées au haut du manche à des clés qui permettent d'accorder l'instrument.
En les tournant, la corde étant enroulée sur la clé, la tension varie. On constate que, pour un quart de tour de clé, la corde la plus fine passe du mi_2 au mi_3. Le cylindre sur lequel est fixée la corde à un diamètre de 5 mm. On définit le module de Young par la relation:

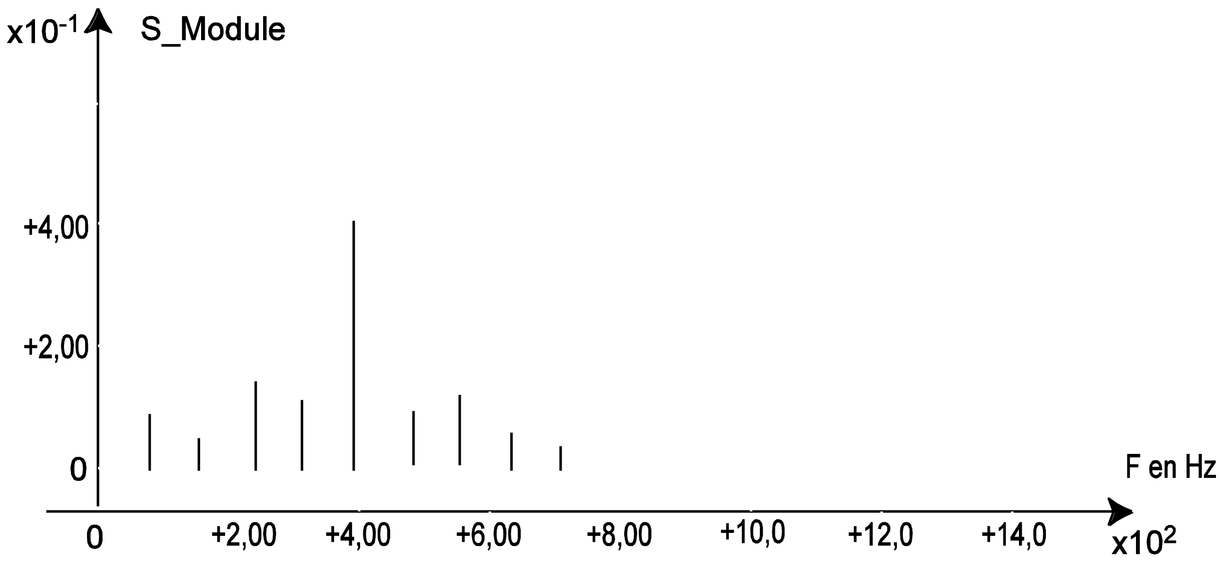
$$E = \frac{T}{S}\frac{l}{\Delta l}$$

où T est la tension de la corde, S sa section, l sa longueur et Δl son allongement.
Trouver une estimation du module de Young E pour l'acier.

Annexes : courbes de la partie IV.



Relevé 1 : enregistrement du son produit par la corde de mi$_1$.



relevé 2 : analyse de Fourier rapide du signal du relevé 1.