

PSI 2022 - 2023*
TD N°13 - Equations de Maxwell - ARQS

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE
DANS UN CONDENSATEUR PLAN CYLINDRIQUE.

Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe $\Delta = z'z$, séparées d'une hauteur h (Figure II-1). Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$, qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ $\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \cos \omega t$ uniforme, sinusoïdal dans le temps et axial (c'est à dire parallèle à l'axe Δ), qu'on écrit en notation complexe : $\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \exp i \omega t$ où \vec{e}_0 est l'amplitude du champ \vec{E}_0 .

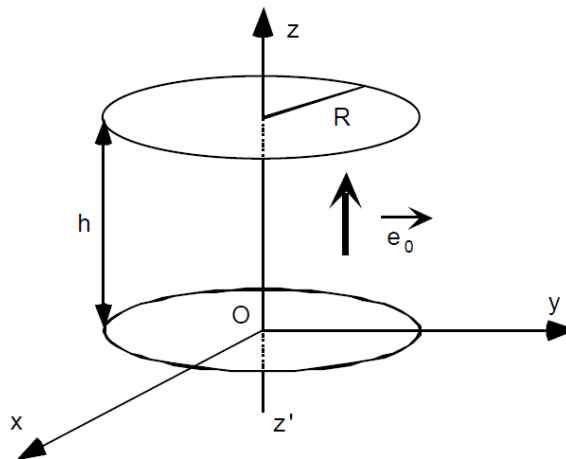


Figure II-1

Le champ électrique \vec{E}_0 crée un champ magnétique \vec{B}_1 , lequel engendre un champ électrique \vec{E}_2 , qui crée à son tour un champ magnétique \vec{B}_3 , qui engendre \vec{E}_4 , etc.
Dans tout le problème, on négligera les effets de bord.

II.A Calcul des champs \vec{B}_1 et \vec{E}_2 .

II.A.1 Les variations dans le temps du champ électrique \vec{E}_0 créent un champ magnétique \vec{B}_1 . On veut calculer \vec{B}_1 .

II.A.1.a En un point M entre les plaques, donner l'équation de Maxwell à laquelle satisfait $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de ω , c (la vitesse de la lumière dans le vide) et \vec{E}_0 .

II.A.1.b On se place dans les coordonnées cylindriques. Montrer que $\vec{B}_1(M, t)$ est orthoradial (c'est à dire dirigé selon \vec{u}_θ).

II.A.1.c Soit le cercle C_1 parallèle au plan xOy , centré sur Δ et passant par M .

Calculer la circulation $\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}$ de \vec{B}_1 sur le contour C_1 qu'on orientera comme \vec{B}_1 .

En déduire l'expression de $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de c , $X = \frac{\omega \rho}{2c}$ et \vec{E}_0

Quelle est la dimension de X ?

II.A.2 Les variations dans le temps du champ magnétique \vec{B}_1 , créent un champ électrique \vec{E}_2 . On veut calculer \vec{E}_2 .

II.A.2.a Quelle relation lie \vec{E}_2 à \vec{B}_1 ? En déduire l'équation de Maxwell satisfaite par $\vec{E}_2(M, t)$ en fonction de c , X , ω et \vec{E}_0

II.A.2.b Sans faire de calculs, montrer que l'on peut supposer \vec{E}_2 axial.

II.A.2.c Soit le contour orienté rectangulaire C_2 (Figure II-2) dans un plan méridien :

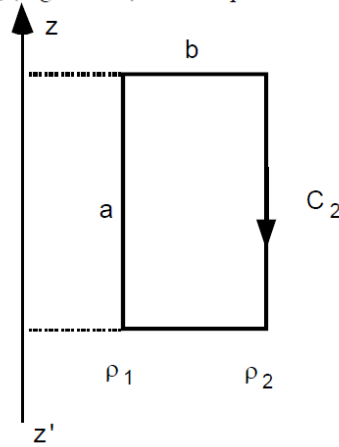


Figure II-2

Calculer la circulation $\oint_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$ de \vec{E}_2 sur C_2 .

En déduire l'expression de $\vec{E}_2(M, t)$ en fonction de X et \vec{E}_0 en prenant $\vec{E}_2(\rho = 0) = \vec{0}$.

II.B Comportement à basse fréquence .

A basse fréquence ($X \ll 1$) on néglige les termes en X de degré supérieur à 2.

II.B.1 Exprimer, dans ces conditions, le champ magnétique total $\vec{B}_{BF}(M, t)$ et le champ électrique total $\vec{E}_{BF}(M, t)$ qui règnent en M à l'instant t à l'intérieur du condensateur, en fonction de c , X et \vec{E}_0 .

II.B.2 Étude énergétique.

II.B.2.a Calculer la densité volumique instantanée $\varepsilon_e(t)$ d'énergie électrique et la densité volumique instantanée $\varepsilon_m(t)$ d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de ε_0 (la permittivité du vide), X , ωt et $e_0 = \left| \vec{e}_0 \right|$.

II.B.2.b On note $\langle \varepsilon_{e,m}(t) \rangle$, les moyennes temporelles correspondantes.

Exprimer, en fonction de X , le rapport $\frac{\langle \varepsilon_m \rangle_t}{\langle \varepsilon_e \rangle_t}$. Que concluez-vous ?

II.C Comportement à haute fréquence .

A haute fréquence, on ne peut plus négliger les termes en X de degré supérieur à 2. On va donc calculer \vec{B}_3 dont \vec{E}_2 est la source, \vec{E}_4 dont \vec{B}_3 est la source, etc ...

II.C.1 Donner l'orientation de \vec{B}_3 .

Quelle est l'équation satisfaite par \vec{B}_3 ?

Calculer $\oint_{C_1} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l}$ et en déduire l'expression de $\vec{B}_3(M, t)$ en fonction de c , X et \vec{E}_0 .

II.C.2 Calculer $\vec{E}_4(M, t)$.

II.C.3 Expression des champs \vec{E}_{2n} et \vec{B}_{2n+1} .

II.C.3.a On veut calculer par récurrence l'expression de \vec{E}_{2n} . On suppose que : $\vec{E}_{2n}(M, t) = \frac{1}{(n!)^2} (iX)^{2n} \vec{E}_0(t)$

En déduire $\vec{B}_{2n+1}(M, t)$.

II.C.3.b Calculer alors $\vec{E}_{2n+2}(M, t)$. Que concluez-vous ?

II.C.4 Étude du champ électrique.

II.C.4.a Montrer que le champ électrique total $\vec{E}(M, t)$ qui règne à l'intérieur du condensateur s'exprime simplement en fonction de \vec{E}_0 et de la fonction de Bessel $J_0(x)$ (donnée en annexe), à condition d'attribuer à x une expression littérale qu'on donnera.

II.C.4.b Décrire la configuration du champ $\vec{E}(M, t)$ et examiner ses variations en fonction de ω . Montrer qu'à la périphérie du condensateur, certaines valeurs de ω annulent le champ électrique.

II.D Calcul direct du champ électrique total E.

Au lieu de calculer le champ total sous forme d'une série, on souhaite calculer directement le champ électrique \vec{E} qui règne entre les armatures.

II.D.1 Obtenir l'équation générale de propagation qui relie les dérivées partielles d'un champ électrique.

II.D.2 On cherche à cette équation une solution axiale, ayant la symétrie du cylindre (invariance par rotation et par translation selon l'axe de révolution), qu'on écrit en notation complexe :

$$\vec{E}(M, t) = E(\rho) \exp(i\omega t) \vec{k}$$

Donner l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction scalaire $E(\rho)$ pour une fréquence donnée.

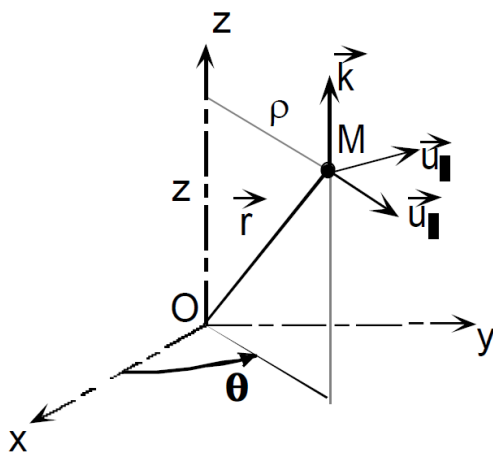
II.D.3 Montrer, par un changement de variable judicieux, que cette équation différentielle peut s'écrire:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 \right) E(x) = 0$$

II.D.4 Montrer qu'on obtient la même solution que précédemment.

Dans les coordonnées cylindriques, un point M est repéré par le jeu de coordonnées ρ, θ, z et la base locale est

$$\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}$$



$$\vec{r} = \vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

$$\vec{A}(M) = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{k}$$

$$\text{où } A_i = A_i(\rho, \theta, z) \quad i = \rho, \theta, z.$$

A condition que $\rho \neq 0$, on a :

$$(15) \quad \vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$(16) \quad \text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$(17) \quad \text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{k}$$

Les formules (1) et (4) permettent d'obtenir les expressions du laplacien scalaire et du laplacien vectoriel. Dans le cas particulier d'un champ scalaire à symétrie cylindrique, le laplacien se réduit à :

$$(18) \quad \Delta f(\rho) = \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho}$$

Annexe III : Les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel $B_\nu(z)$ sont des solutions de l'équation différentielle :

$$(19) \quad \frac{d^2 B_\nu(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dB_\nu(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) B_\nu(z) = 0 \quad \nu \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ sont définies par la série :

$$(20) \quad J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \quad | \arg z | < \pi$$

où Γ est la fonction qui généralise la fonction factorielle.

Dans le cas particulier $\nu=0$, nous avons :

$$(21) \quad J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}$$

Pour x réel, le graphe de la fonction $J_0(x)$ est, pour sa partie $x > 0$, le suivant :

