TD n° 14 – CORDE VIBRANTE

EXERCICE 1 : Ondes stationnaires et perturbation par une masse (CCP PSI extrait)

II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde tendue

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique μ, est soumise à une tension d'équilibre T. Ses déformations dans le plan (x, y) sont décrites par une fonction de hauteur $y = h(x, t)$. Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle $\alpha(x, t)$ que fait la courbe h avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée $\partial h/\partial x$.
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective x_A et x_B. Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse x_C (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

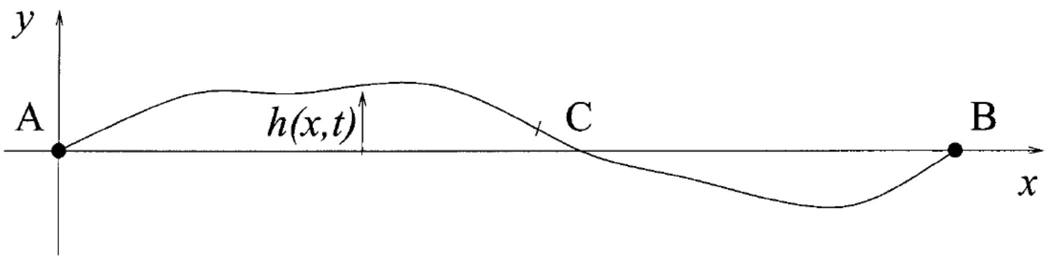

Figure II.1

- **II.1.1**
  Soit un point O d'abscisse x_O situé dans l'intervalle [AB] ($x_A < x_0 < x_B$). La partie de la corde située à droite du point O ($x > x_O$) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force $\vec{F}(x_O, t)$.
  Comment s'exprime, en fonction de T et d'une dérivée de $h(x, t)$, la composante verticale (suivant y) de cette force $\vec{F}$?

- **II.1.2**
  Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par $h(x, t)$. Exprimer la célérité c associée en fonction des paramètres μ et T.

- **II.1.3**
  Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée $\partial h/\partial x$ en des points autres que A et B ? Justifier votre réponse.

- **II.1.4**
  La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit $h(x_A, t) = 0$ et $h(x_B, t) = 0$. La longueur de la corde entre ces deux points est $2L$, et l'on choisit l'origine du repère de façon à avoir $x_A = 0$ et $x_B = 2L$.
  On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x, t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$$

  où Z est une amplitude arbitraire.
  Donner, en la démontrant, la relation existant entre ω, k et c.

- **II.1.5**

  Les valeurs admissibles de k (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes k_n, où $n = 1, 2, 3\ldots$ est entier positif.
  Donner l'expression des k_n admissibles, des pulsations propres ω_n et des fréquences f_n associées.
  Comment choisir la phase ϕ ?

- **II.1.6**

  Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1, telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.
  Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement k_2, k_3, k_4).
  Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

- **II.1.7**

  On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur** $e(x,t)$ associée à l'onde est égale à :

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]$$

  Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle e \rangle$ en un point quelconque x de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

- **II.1.8**

  En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension T de la corde, de sa demi-longueur L et de l'amplitude Z des vibrations.
  Application numérique : Que vaut l'amplitude Z des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec $L = 1$ m, $T = 100\ N$?

II.2 Perturbation par une masse

On accroche à la corde une perle de masse m, située exactement au milieu de la corde, au point d'abscisse $x_C = L$. Cette masse est supposée ponctuelle (sans épaisseur).

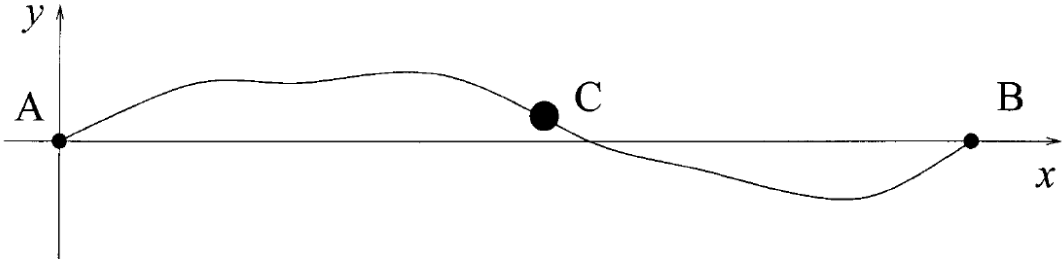

Figure II.2

- **II.2.1**

  En considérant les schémas tracés à la question II.1.6, déterminer les modes de vibration susceptibles d'être modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la masse m.
  Déterminer de la même façon les modes qui ne devraient pas être modifiés par la présence de la masse.

- **II.2.2**

En présence de cette masse supposée ponctuelle, les dérivées à gauche et à droite de $\partial h/\partial x$ ne sont pas nécessairement égales (la dérivée $\partial h/\partial x$ est discontinue en L).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD), trouver une relation entre T, m, $\partial^2 h/\partial t^2(L,t)$ (accélération suivant y de la masse), $\partial h/\partial x(L^-,t)$ et $\partial h/\partial x(L^+,t)$, où l'on a défini :

$$\partial h/\partial x(L^-,t) = \lim_{x\to L^-} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$$

lorsque x tend vers L par valeur inférieure, et :

$$\partial h/\partial x(L^+,t) = \lim_{x\to L^+} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$$

lorsque x tend vers L par valeur supérieure.

Illustrer votre relation par un schéma.

- **II.2.3**

On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à L, c'est-à-dire telle que $h(x,t) = h(2L-x,t)$, et donnée sur l'intervalle de gauche $0 \leq x < L$ par :

$$h(x,t) = \sin(Kx)\cos(\omega t)$$

où K est un vecteur d'onde à déterminer, et ω et K vérifient la relation de dispersion habituelle.

Montrer que les conditions aux limites imposent désormais la condition de quantification suivante sur les valeurs possibles de ω et K :

$$\text{cotan}(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

- **II.2.4**

Tracer la courbe représentative de $\text{cotan}(x)$ sur l'intervalle $]0, 3\pi[$.

Montrer que si la masse m est nulle, on retrouve comme cas particulier de l'équation ci-dessus le vecteur d'onde k_1 de la fréquence de vibration de la corde homogène.

- **II.2.5**

Lorsque m est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en m du vecteur inconnu K :

$$K \simeq k_1 + \beta m$$

où β est une constante à déterminer en fonction de ω, c, T et L. On utilisera en particulier le développement limité suivant de la fonction cotangente, valable pour de petites valeurs de ε :

$$\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \simeq -\varepsilon$$

K est-il plus grand ou plus petit que k_1 ?

- **II.2.6**

Déduire de la question précédente le changement relatif de fréquence $\Delta f_1/f_1$ du mode de vibration fondamental de la corde lorsque l'on passe du vecteur k_1 au vecteur K. Exprimer le résultat en fonction de m, μ et L.

Application numérique : Calculer m lorsque $L = 1$ m, $T = 100$ N, $\mu = 10^{-2}$ kg.m^{-1}, $\Delta f_1 = -1$ Hz.

EXERCICE 2 : Vibration de cymbales (Centrale PSI 2010)

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier étudiées dans les questions précédentes, elles ne produisent pas un son de hauteur bien définie. Bien qu'une cymbale possède une forme incurvée, nous les assimilerons à de fines plaques planes circulaires de rayon R et d'épaisseur b contenues au repos dans le plan (Oxz). Dans ce cadre, les vibrations transversales consécutives à l'excitation de la surface par un choc obéissent à une équation voisine de celle de la question I.B.3

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_l^2 b^2}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2}\right) = 0 \text{ avec } \sigma = 0,34\,.$$

I.D.1) On envisage la propagation d'une onde plane progressive du type $y(x, z, t) = y_0 \exp\{\, i[\omega t - \boldsymbol{k} \cdot (x\boldsymbol{u}_x + z\boldsymbol{u}_z)]\}$.

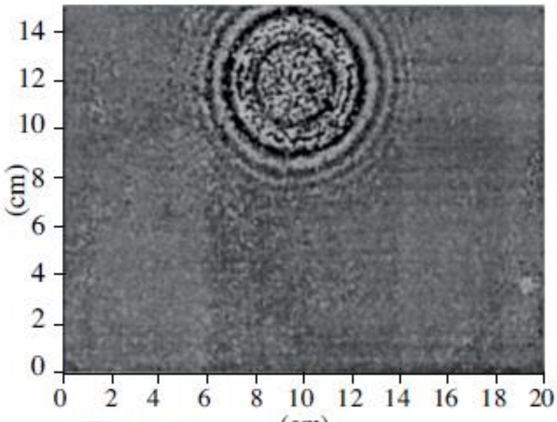

Figure 4a

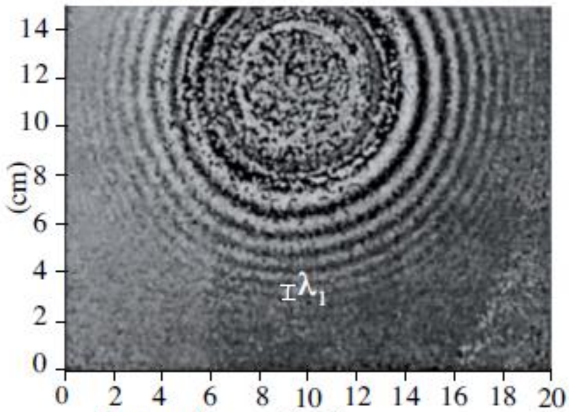

Figure 4b

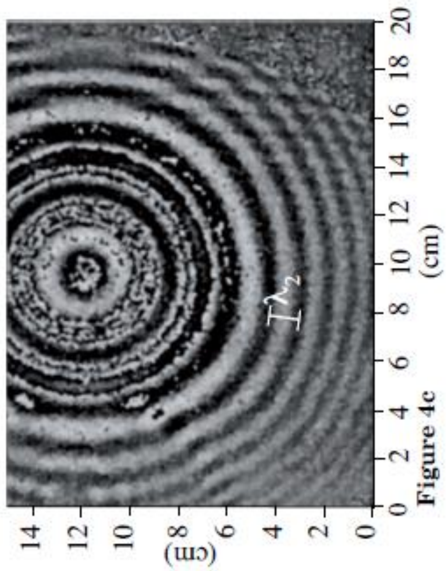

Figure 4c

Figure 4a - 4b - 4c - État vibratoire d'une cymbale à trois instants suivant une excitation ponctuelle :

$t = 30\mu s, t = 60\mu s, t = 120\mu s$

Établir la relation entre ω et $k = |\boldsymbol{k}|$. En déduire l'expression de la fréquence f en fonction de la longueur d'onde λ .

I.D.2) Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de la longueur d'onde λ . La propagation est-elle dispersive ?

I.D.3) La figure 4 représente l'état vibratoire d'une cymbale de bronze à divers instants suivant une excitation ponctuelle. L'observation confirme-t-elle la réponse de la question précédente ? Expliquer.

I.D.4) On a signalé sur la figure 4 des déformations de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 6$ mm et $\lambda_2 = 12$ mm . En exploitant les images, déterminer $v_\varphi(\lambda_1)$ et $v_\varphi(\lambda_2)$. Comparer quantitativement ces deux valeurs et confronter le résultat à la prédiction théorique de la question I.D.2. Sachant que la cymbale est en bronze, déterminer son épaisseur b .

On donne $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, où E est le module d'Young du matériau, $E = 1.1\ 10^{11}$ Pa, et

ρ sa masse volumique, $\rho = 8.7\ 10^3$ kg.m^{-3}.