# PSI* 2017 – 2018

# TD N°14 – CORDE VIBRANTE

N.B. : Les notations sont celles du cours ; l'équation (1) est l'équation de D'Alembert.

## B. Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

### 1. Modes propres, fréquences propres

**a)** Qu'appelle-t-on *onde stationnaire* ?

**b)** Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (1) sont de la forme :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Quelle est la relation entre $\omega$ et $k$ ?

**c)** Définir les *modes propres* et les *fréquences propres* de la corde.

**d)** Montrer que les fréquences propres de la corde sont :

$$f_n = n\frac{c}{2L}$$

**e)** Définir les *ventres* et les *nœuds* de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? entre deux nœuds consécutifs ? entre un ventre et un nœud consécutifs ?

**f)** Dessiner l'aspect de la corde à différents instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

**g)** Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde de guitare ou de piano.

La description d'une expérience doit comporter un schéma explicatif et le protocole expérimental.

**h)** On considère les cordes dont on a donné les caractéristiques à la question **A.**2c.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré$_2$). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

### 2. Solution générale

On admet que la solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ est une superposition des modes propres. On l'écrit sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2)$$

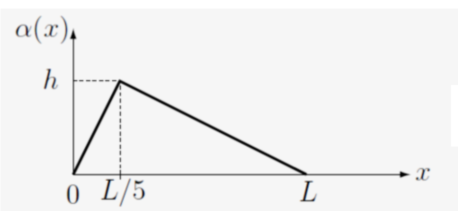
Les conditions initiales sont constituées par la donnée de :

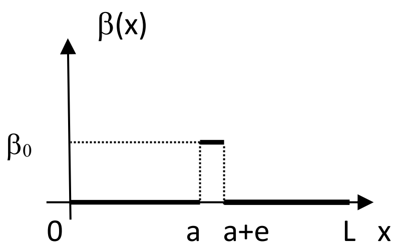
- la forme de la corde : $y(x, 0) = \alpha(x)$,
- sa vitesse : $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \beta(x)$,

où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions définies sur $[0,\ L]$.

On s'intéresse aux fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaires, périodiques de période $2L$ et qui coïncident avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$.

a. On donne les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ suivantes :



- L'une des fonctions correspond à une corde frappée, l'autre à une corde pincée : indiquer laquelle est laquelle.
- Illustrer graphiquement la construction de $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$.

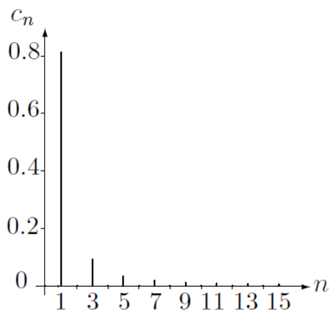
b. Expliquer comment les coefficients $a_n$ et $b_n$ peuvent être calculés à partir des fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$ ; ***les calculs ne sont pas demandés.***

**3. Corde pincée**

Une corde de longueur $L$ est pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$ (corde de guitare ou de clavecin par exemple).

Que valent les coefficients $b_n$ ?

On donne le spectre pour une corde pincée à la moitié de sa longueur :

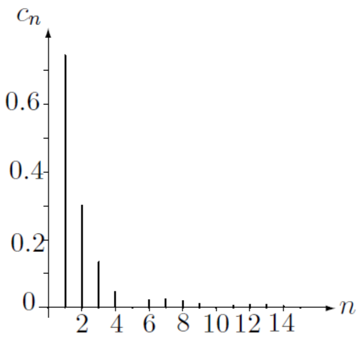


Corde pincée en $L/2$

Calculer les rapports $c_3/c_1$ et $c_5/c_1$ et montrer qu'ils sont bien en accord avec forme de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$ correspondante.

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

On donne ensuite le spectre pour une corde pincée au 1/5$^{\text{ème}}$ de sa longueur :



Corde pincée en $L/5$

Quelle est le son le plus riche ? On pourra prendre pour fixer les idées la fréquence fondamentale f = 147 Hz du B.1.h.

**4. Corde frappée**

Une corde de piano est frappée par un petit marteau à la distance $x_0 = sL$ de son extrémité $x = 0$.

a) Que valent les coefficients $a_n$ ?

**b)** On peut montrer que les coefficients $a_n$ associés à la corde pincée étudiée à la question **B.**3 décroissent globalement comme $\frac{1}{n^2}$. En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en $\frac{1}{n}$ (au moins à partir d'une certaine valeur de $n$).

Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées).

5. Quel(s) phénomène(s) essentiel(s) ont été oubliés dans ce modèle d'instruments à cordes.

## C. Étude énergétique

**1. a)** Exprimer la densité linéique d'énergie cinétique $e_C$ de la corde en mouvement en fonction de $\mu$ et de $\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

**b)** On étudie la portion de corde située entre les abscisses $x$ et $x+\mathrm{d}x$. Dans cette question, il est conseillé de travailler avec les variables $T_y = T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}$ et $v = \dfrac{\partial y}{\partial t}$.

**i)** Exprimer la puissance des forces extérieures à ce système.

**ii)** En appliquant le théorème de la puissance cinétique à ce système, exprimer la puissance des forces intérieures.

**iii)** En déduire que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P(x,t) = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est au repos.

**2. a)** On étudie la corde dans le mode propre $n$. L'ébranlement est écrit sous la forme :

$$y_n(x,t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode $n$ s'écrit :

$$E_n = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L}T_0$$

**b)** On considère maintenant la solution générale sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie $E$ de la corde est :

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Commenter.

**3.** On a vu précédemment que les amplitudes des différents harmoniques d'une corde pincée sont de la forme $c_n = \dfrac{c_1}{n^2}$ alors que ceux d'une corde frappée sont de la forme : $c'_n = \dfrac{c'_1}{n}$. Comparer les énergies des différents modes d'une corde de clavecin (corde pincée) et d'une corde de piano (corde frappée). Commenter.

## D. Raideur de la corde

Dans la suite on tient compte de la raideur de la corde ; on peut montrer que l'équation de propagation le long de la corde s'écrit :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ESK^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

où E et K sont des coefficients dépendant de la géométrie et du matériau constituant la corde et S est sa section.

**a)** En supposant que la déformation est harmonique, donc de la forme :

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \varphi)$$

donner la relation entre $\omega$ et $k$.

b) i) Montrer que les fréquences propres de la corde tendue se mettent sous la forme :

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où $c$ est la célérité des ondes dans la corde sans raideur et $B$ une constante à exprimer en fonction de $E$, $S$, $K$, $T_0$ et $L$.

**ii)** Tracer, sur le même graphique, les courbes représentant $f_n$ en fonction de $n$ pour une corde sans raideur puis pour une corde avec raideur.

**iii)** Pour une corde de piano étudiée plus haut, on donne : $B = 4\ 10^{-4}$. À partir de quelle valeur de $n$ la fréquence propre de la corde avec raideur est-elle plus aiguë d'un demi-ton que celle de la corde idéale ? On rappelle que la gamme tempérée divise l'octave en 12 intervalles, appelés *demi-tons*, et que les fréquences successives $f_p$ des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique vérifiant la loi générale $f_p = 2^{p/12} f$ où $p \in [1, 12]$ ($p$ entier).