PSI* 2024 - 2025
TD N°14
Corde vibrante

EXERCICE 1 : Corde d'instruments de musique

N.B. : Les notations sont celles du cours ; l'équation (1) est l'équation de D'Alembert.

Question préliminaire

Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde de piano ou de guitare. La description de l'expérience doit comporter au moins un schéma explicatif et le protocole expérimental.

Soit :

- une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3$ g.m^{-1}, tension $T_0 = 103$ N ;
- une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800$ kg.m^{-3}, tension $T_0 = 850$ N, diamètre $\phi = 1,2$ mm.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré$_2$). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

Solution générale

On admet que la solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $y(0,t) = y(L,t) = 0$ est une superposition des modes propres. On l'écrit sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2)$$

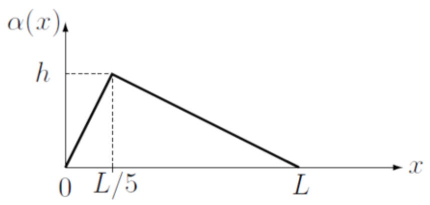
Les conditions initiales sont constituées par la donnée de :

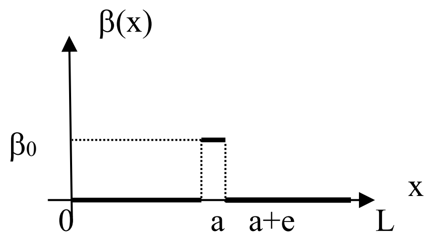
- la forme de la corde : $y(x,0) = \alpha(x)$,
- sa vitesse : $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x)$,

où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions définies sur $[0,\ L]$.

On s'intéresse aux fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaires, périodiques de période $2L$ et qui coïncident avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$.

a. On donne les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ suivantes :





- L'une des fonctions correspond à une corde frappée, l'autre à une corde pincée : attribuez-les.
- Illustrer graphiquement la construction de $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$.

b. Expliquer comment les coefficients a_n et b_n peuvent être calculés à partir des fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$; ***les calculs ne sont pas demandés.***

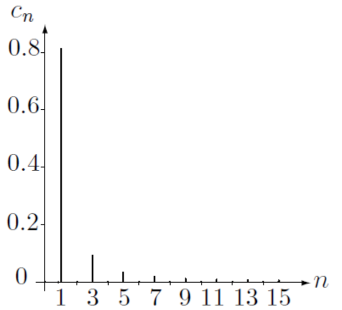
c.

Corde pincée

Une corde de longueur L est pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$ (corde de guitare ou de clavecin par exemple).

Que valent les coefficients b_n ?

On donne le spectre pour une corde pincée à la moitié de sa longueur :

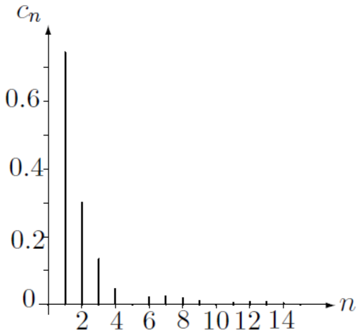


Corde pincée en $L/2$

Calculer les rapports c_3/c_1 et c_5/c_1 et montrer qu'ils sont bien en accord avec forme de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$ correspondante.

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

On donne ensuite le spectre pour une corde pincée au 1/5ème de sa longueur :



Corde pincée en $L/5$

Quelle est le son le plus riche entre celui de la corde pincée au 1/5 et à la moitié ? On pourra prendre pour fixer les idées la fréquence fondamentale f = 147 Hz du B.1.h.

Corde frappée

Une corde de piano est frappée par un petit marteau à la distance $x_0 = sL$ de son extrémité $x = 0$.

a) Que valent les coefficients a_n ?

b) On peut montrer que les coefficients a_n associés à la corde pincée étudiée à la question .3 décroissent globalement comme $\frac{1}{n^2}$. En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en $\frac{1}{n}$ (au moins à partir d'une certaine valeur de n).

Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées).

Quel(s) phénomène(s) essentiel(s) ont été oubliés dans ce modèle d'instruments à cordes.

EXERCICE 2 : Relations de passage pour une corde composée (d'après CCINP)

On considère une corde composée le long d'un axe Ox : l'une de deux parties, située entre - ∞ et 0, a une masse linéique μ_1 et l'autre, située entre 0 et + ∞, est de masse linéique μ_2.

La corde est tendue avec la tension T sur toute sa longueur. Les hypothèses de travail sont celles du cours.

On considère une onde incidente progressive venant du milieu 1 et se dirigeant dans le sens des x croissants, dont on donne la représentation complexe :

$$\underline{z}_i(x,t) = \underline{A}_i \exp(j\omega[t - x/C_1])$$

On veut déterminer les ondes réfléchie et transmise à la séparation des deux milieux.
Les célérités y seront C_1 et C_2.

1) Donner la représentation complexe des ondes transmise et réfléchie. On prendra $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$ comme amplitudes respectives de ces deux ondes en notation complexe.

2) Donner les conditions de passage à la frontière des deux milieux en indiquant au préalable quelles grandeurs sont continues et pourquoi.

3) Déterminer les amplitudes $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$. Définir et donner l'expression des coefficients de transmission et de réflexion en fonction des deux masses linéiques, μ_1 et μ_2.
Étudier trois cas particuliers liés à des valeurs remarquables ou limites de μ_2.

4) On considère $\underline{A}_i$ = A. Exprimer les ondes réelles associées respectivement au milieu 1 et au milieu 2.

a) Exprimer les ondes réelles associées respectivement au milieu 1 et au milieu 2.

b) On donne les expressions de l'énergie linéique de la corde et du flux d'énergie :

$$e = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \text{ et } \Phi = -T\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

D'autre part on admet la relation (que l'on pourra montrer à titre d'exercice) :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right).$$

- Commenter l'expression de e et la relation liant e et Φ.
- L'énergie mécanique est-elle continue au passage en O ? Donner l'expression du flux d'énergie qui s'écoule le long de la corde pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et pour l'onde transmise : Φ_i, Φ_r et Φ_t. Vérifier la conservation de l'énergie lors du passage en O.