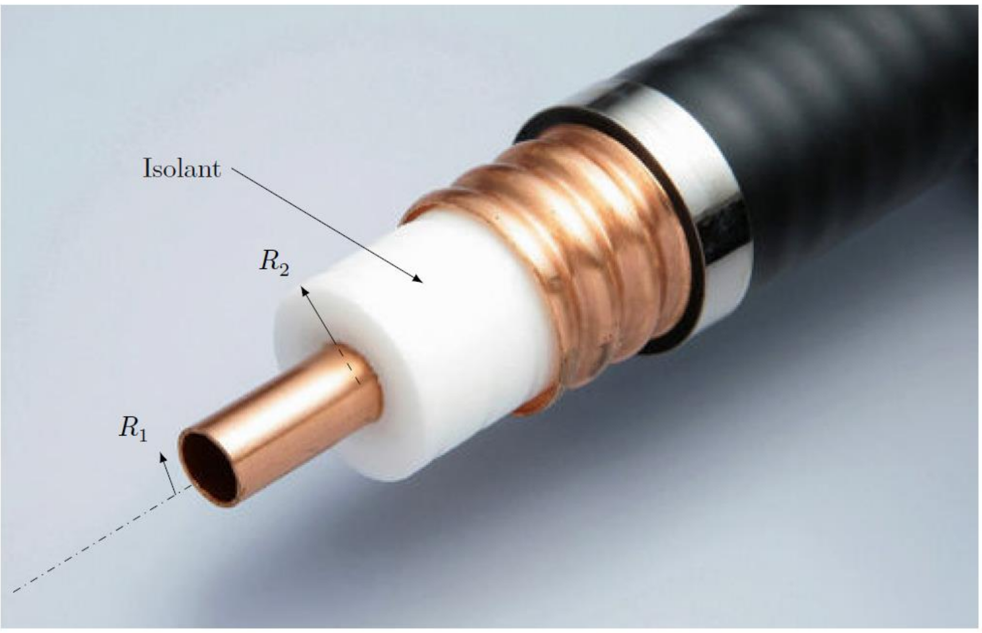
PSI* 2020 – 2021
TD PHYSIQUE N°15 – OEM (1)

EXERCICE 1 : Coaxial (Exercice Oral Centrale 1)

On s'intéresse à un signal transporté via un câble coaxial, de grande dimension selon son axe $z'z$, et constitué de deux surfaces cylindriques parfaitement conductrices, de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. L'espace entre les conducteurs est un isolant de permittivité diélectrique absolue $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ et de perméabilité magnétique μ_0. Dans ce milieu, on admet que l'on peut utiliser les résultats établis dans le vide en remplaçant la permittivité du vide ε_0 par la permittivité absolue du milieu $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.



Le conducteur interne achemine dans le sens des z positifs un courant alternatif sinusoïdal d'intensité

$$\underline{I} = \underline{I}_m(z)e^{\mathrm{i}\omega t}$$

et le conducteur externe un courant exactement opposé. Entre les conducteurs, le champ électrique s'écrit

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}_0(r,z)e^{\mathrm{i}\omega t}\vec{u}_r$$

1. Montrer que $\underline{I}_m(z)$ obéit à une équation différentielle dont une solution est $\underline{I}_m(z) = I_0 e^{-\mathrm{i}kz}$ où I_0 est une constante et k une fonction de ω que l'on déterminera.
2. a. Caractériser le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ dans l'espace entre les conducteurs.
   b. Déterminer la puissance électromagnétique moyenne $\langle P\rangle$ transportée dans l'isolant.

Données

$f = 100$ MHz, $\varepsilon_r = 3$, longueur du câble $= 200$ m, $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ H·m^{-1}, $\varepsilon_0 = 8{,}84\times 10^{-12}$ F·m.
On donne en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial F_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_r}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_r}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 : Superposition de deux OPPM dans le vide

Une OPPM électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide. Son vecteur d'onde est :

$$\vec{k}_1 = k_1(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_z) .$$

Elle est polarisée rectilignement dans la direction parallèlement à Oy :

$$\vec{E}_1 = E_o.\cos\left(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r}\right)\vec{e}_y$$

1. Que vaut k_1 ? Quel est le champ magnétique associé à cette onde ?

Une deuxième onde, de mêmes fréquence, amplitude et polarisation, de vecteur d'onde $\vec{k}_2 = k_2(\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_z)$, est superposée à la première. Ces deux ondes sont en phase à l'origine du système de coordonnées cartésiennes utilisé.

2. Montrer que les champs électrique et magnétique de l'onde globale valent :

$$\vec{E} = 2E_o.\cos\left(\frac{\omega.z.\sin\alpha}{c}\right)\cos\left(\omega\left(t - \frac{x.\cos\alpha}{c}\right)\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{2E_o}{c}\left[-\sin\left(\omega\left(t - \frac{x.\cos\alpha}{c}\right)\right)\sin\left(\frac{\omega.z.\sin\alpha}{c}\right)\sin\alpha.\vec{e}_x + \cos\left(\omega\left(t - \frac{x.\cos\alpha}{c}\right)\right)\cos\left(\frac{\omega.z.\sin\alpha}{c}\right)\cos\alpha.\vec{e}_z\right]$$

3. Quelle est la direction de propagation de cette onde globale ? Est-elle plane ? stationnaire ? Quelle vitesse de phase pouvons-nous associer à cette onde ? Quelle est la particularité de cette vitesse ?

4. Quelle est la valeur moyenne temporelle $<\vec{\Pi}>$ du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde. A-t-on $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2$? $<\vec{\Pi}> = <\vec{\Pi}_1> + <\vec{\Pi}_2>$? Commenter.

5. Quelle est l'énergie moyenne transportée par unité de temps et de surface à travers un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde résultante ?

6. Quelle vitesse d'énergie peut-on associer à cette onde ? Commenter ce résultat.