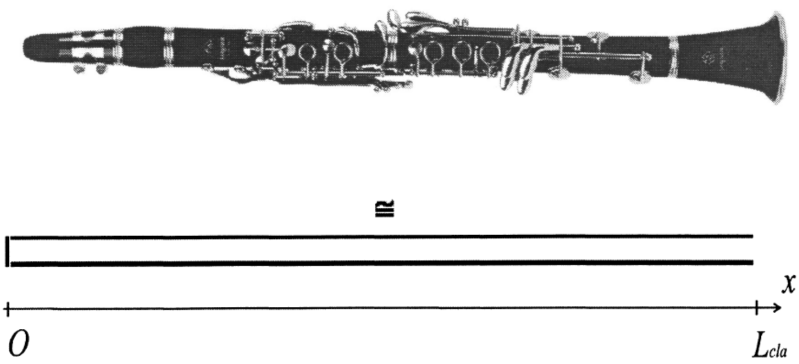
PSI*- PSI 2022 – 2023

TD N°17

SAXOPHONE ET CLARINETTE

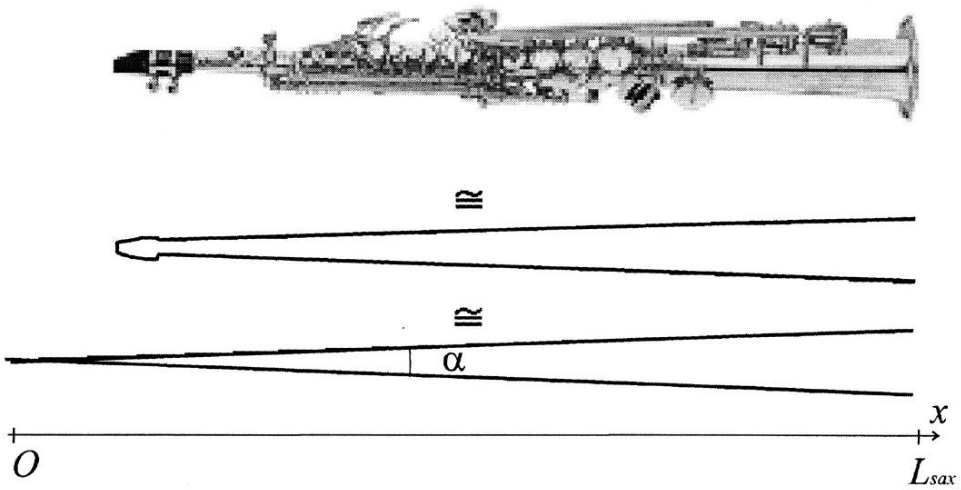
La clarinette a été créée vers 1700 par Johann Christophe Denner à Nuremberg. La clarinette en *Si bémol* en est le modèle le plus commun (figure 1). Le tube de la clarinette est **modélisé** par un cylindre de longueur L_{cla}, fermé du côté de l'embouchure (à gauche) et ouvert du côté du pavillon (à droite). Il s'agit d'une approximation grossière qui a le mérite de préserver les caractéristiques physiques les plus importantes. En réalité, le tube de la clarinette n'est pas à section constante et le traitement mathématique est alors beaucoup plus compliqué…

Figure 1 : clarinette et son modèle de tuyau cylindrique



Le saxophone a été breveté en 1846 par Adolphe Sax, en Belgique. Parmi les modèles utilisés aujourd'hui, on trouve le saxophone soprano en *Si bémol* (figure 2). Le saxophone est ouvert du côté du pavillon (à droite), mais il est quasiment fermé de l'autre coté (à gauche). Le tube du saxophone est approximativement conique. Nous allons modéliser le tube du saxophone soprano par un simple tuyau conique de longueur un peu plus grande que celle de la clarinette (soit L_{sax}) et d'angle au sommet α.

Figure 2 : saxophone soprano et son modèle de tuyau conique



EQUATION DE PROPAGATION D'UNE ONDE SONORE DANS UN TUBE

On considère un tube indéformable de longueur L, d'axe de révolution (Ox) rempli d'air, supposé être un gaz parfait à la température moyenne ambiante T_0 et à la pression P_0. Soit ρ_0 la masse volumique moyenne de cet air. La section transverse du tube est une fonction de l'abscisse x: soit $S(x)$ cette section (figure 3).

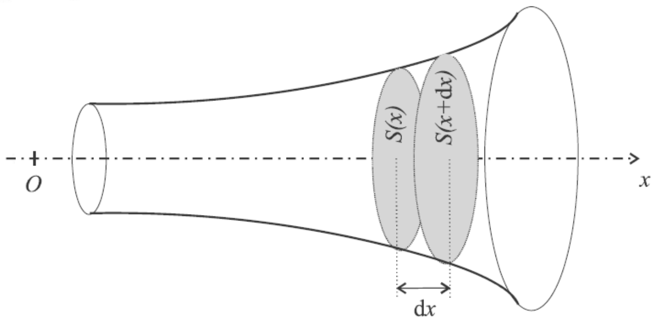


Figure 3 : Petite tranche d'air dans un tube acoustique de section variable

En présence de l'onde sonore, le champ de vitesse de l'air est le suivant : $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\,\vec{e}_x$ où $u(x,t)$ est faible devant la vitesse de propagation de l'onde.
On note $\rho(x,t)$ la masse volumique de l'air à l'instant t et à l'abscisse x.
On supposera qu'en présence de l'onde sonore, la masse volumique de l'air s'écrit $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ où $\mu(x,t) << \rho_0$ et que la pression de l'air s'écrit $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ avec $p(x,t) << P_0$.

Bilan de masse sur un système ouvert

On s'intéresse à l'air compris entre les sections d'abscisses x et $x + dx$. Ce système est **ouvert**.

A.1 Exprimer la masse $dm(t)$ de ce système à l'instant t en fonction de $S(x)$ notamment. Même question pour l'instant $t + dt$.

A.2 Exprimer la masse δm_e de fluide entrant dans le système pendant la durée dt en fonction de $\rho(x,t)$, $S(x)$ et $u(x,t)$. Exprimer aussi la masse δm_s de fluide sortant du système pendant la même durée.

A.3 En se limitant à des termes du premier ordre, montrer que l'on obtient l'équation de conservation de la masse suivante : $S(x)\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial (Su)}{\partial x} = 0$.

Equation du mouvement

A.4. Dans le cadre de l'approximation acoustique, rappeler l'équation vectorielle reliant l'accélération locale et la surpression acoustique.

A.5. En déduire une relation linéarisée entre $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial p}{\partial x}$.

A.6 On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique χ_s est égal à $\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$. Toujours à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, établir une relation entre $\mu(x,t)$, χ_s, ρ_0 et $p(x,t)$.

Equations de propagation

A.7 En combinant les résultats de **A.3**, **A.5** et **A.6**, montrer que :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right) \qquad \text{(équation } \mathbf{E1}\text{)}$$

et que :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\cdot u(x,t)\right) \qquad \text{(équation } \mathbf{E2}\text{)}$$

Préciser l'expression de la constante c en fonction de ρ_0 et de χ_s.

A.8 En supposant que l'air est un gaz parfait, exprimer ρ_0 en fonction de la masse molaire de l'air notée *M*, de la pression P_0, de la température T_0 et de la constante des gaz parfaits *R*.

A.9 En supposant que l'air dans le tube subit une transformation isentropique, la loi de Laplace est vérifiée. Rappeler cette loi reliant les grandeurs pression $P(x,t)$ et masse volumique $\rho(x,t)$. On introduira le coefficient d'atomicité $\gamma = C_P/C_V$ où C_P et C_V sont les capacités thermiques molaires de l'air respectivement à pression constante et à volume constant. Exprimer alors χ_s en fonction de γ et de P_0.

A.10 Donner alors l'expression de la constante c en fonction de la température T_0, de la masse molaire de l'air M, de la constante des gaz parfaits R et du coefficient γ.
Faire l'application numérique avec $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $\gamma = 1{,}4$ et T_0 correspondant à une température de 20 °C.

ONDES STATIONNAIRES DANS UNE CLARINETTE

Tous les trous de la clarinette sont bouchés. La clarinette est alors modélisée par un tube cylindrique de section S constante.

A.11 Que deviennent les équations **E1** et **E2** obtenues à la question **A.7** dans le cas de la clarinette ? Que représente alors la constante c ?

A.12. Quelles sont les conditions aux limites en x = 0 pour la vitesse et en $x = L_{cla}$ pour la surpression ?

A.13. On cherche alors des solutions stationnaires de la forme p(x, t) = f(x)cos(ωt) et u(x, t) = g(x)sin(ωt). Etablir les équations différentielles dont f(x) et g(x) sont solutions. Quelles sont les formes générales des solutions ?

A.14. En écrivant la fonction g(x) sous la forme $u_1\sin(kx + \phi)$, déterminer ϕ et relier k et ω.

A.15. En utilisant A.5., donner la forme de f(x), puis, en étudiant la condition aux limites $p(L_{Cla}, t)$, montrer que les valeurs de k et ω sont quantifiées et déterminer les k_n et ω_n correspondants.

A.16. Montrer alors que les solutions stationnaires possibles (ou modes de la clarinette), $p_n(x, t)$ et $u_n(x, t)$, doivent s'écrire : $u_n(x, t) = u_1\sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$ et $p_n(x, t) = p_1\cos(k_n x)\cos(\omega_n t)$.
Exprimer p_1 en fonction de ρ_0, c et u_1.

A.17. Quelles sont les conditions aux limites en x = 0 pour la surpression et en x = L_{cla} pour la vitesse ? Commenter.

A.18. Donner l'expression de la fréquence du mode fondamental de la clarinette ; donner la fréquence du premier harmonique non nul.

ONDES STATIONNAIRES DANS UN SAXOPHONE SOPRANO

Tous les trous du saxophone sont bouchés. Le saxophone soprano est formé par un tube conique de hauteur L_{sax}, d'origine O et d'angle au sommet α.

A.19 Calculer la section $S(x)$ en fonction de x et de α.

A.20 Montrer alors que l'équation **E.1** obtenue à la question **A.7** s'écrit aussi :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 (x \cdot p(x,t))}{\partial x^2}\right)$$

A.21 On effectue le changement de variable suivant : $\Pi(x,t) = x \cdot p(x,t)$. Préciser l'équation vérifiée par $\Pi(x,t)$. Quelles sont les conditions aux limites (en $x = 0$ puis en $x = L_{sax}$) pour $\Pi(x,t)$?

A.22 On recherche une solution stationnaire pour $\Pi(x,t)$ sous la forme $h(x)\cdot\cos(\omega t)$.
Préciser l'équation vérifiée par *h(x).*
A partir des conditions aux limites, montrer que $h(x)$ est de la forme $h(x) = E\sin(kx)$.
En déduire que seules des ondes stationnaires de pulsations particulières à déterminer peuvent être engendrées dans le saxophone.

A.23 Tous les trous du saxophone sont bouchés : tout le tube est alors le siège d'une onde stationnaire. Donner l'expression de la fréquence f_1 du mode fondamental existant dans le saxophone soprano en fonction de c et L_{sax}. Donner aussi l'expression de la fréquence du premier harmonique. Comparer au cas de la clarinette.

PAVILLON EXPONENTIEL

Les extrémités des instruments à vent (comme la clarinette et le saxophone ci-dessus) sont dotées de pavillon permettant l'adaptation d'impédance entre le « tuyau » sonore et l'air extérieur. Ces pavillons sont le plus souvent exponentiel : S(x) = $S_0 e^{\frac{x}{\delta}}$.

A.24. a) Réécrire l'équation **(E1).**

b) On cherche des solutions planes pour $\underline{p}$(x, t) ; déterminer la relation de dispersion de cette onde dans le pavillon. En exploitant cette relation, montrer que l'onde ne peut se propager dans le pavillon que si sa fréquence est supérieure à une fréquence de coupure, f_C, que l'on exprimera en fonction de S_0, S(a), c et a, où a est la longueur du pavillon.

c) Exprimer en fonction des données, la vitesse de phase et une distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans le pavillon.

d) Déterminer la puissance moyenne transférée par l'onde sonore à travers la surface S(x) du pavillon en fonction de ρ_0, c, S_0, f et f_C.