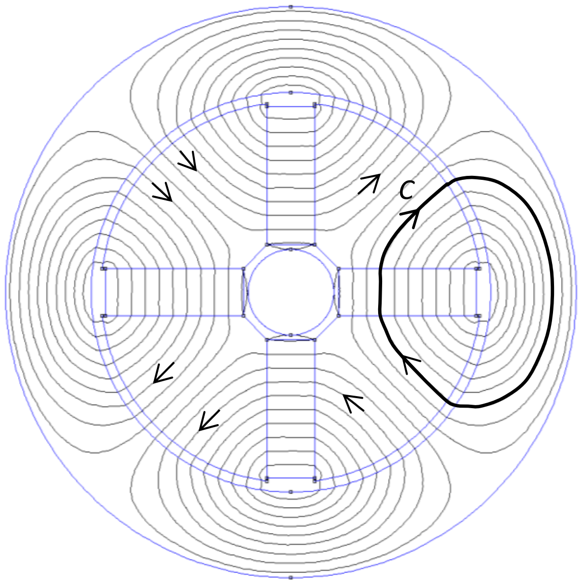
MOTEUR SYNCHRONE AUTOPILOTE

I) Moteur synchrone à aimants permanents

1) Le graphe $B_r(\alpha)$ permet d'orienter les lignes de champ (voir plus bas).

Dans le matériau ferromagnétique on a $\vec{H}_m = \dfrac{\vec{B}_m}{\mu_0\mu_r}$, dans l'entrefer donc dans l'air, $\vec{H}_e = \dfrac{\vec{B}_e}{\mu_0}$ et dans l'aimant $\vec{H}_a = \dfrac{\vec{B}_a}{\mu_0} - \vec{M}$.



2) On applique le théorème d'Ampère pour $\vec{H}$ sur le contour *C* qui est une ligne de champ magnétique. En l'absence de courants libres on a $\oint \vec{H}.\vec{dl} = 0$.

En tout point du contour le champ $\vec{H}$ est colinéaire à $\vec{B}$ donc à $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et l'intégrale peut s'écrire $\oint \vec{H}.\vec{dl} = \oint Hdl$.

La circulation dans le matériau magnétique, de perméabilité très grande étant négligée, il reste, en tenant compte de la symétrie qui implique $H_e(\alpha) = -H_e(-\alpha)$,

$\oint Hdl = bH_a + 2eH_e$ (donc $H_a < 0$).

On en déduit $0 = b\left(\dfrac{B_a}{\mu_0} - M_0\right) + 2e\dfrac{B_e}{\mu_0}$. Soit :

$$M_0 = \frac{B_a}{\mu_0} + \frac{2e}{b}\frac{B_e}{\mu_0}$$

Le champ magnétique est un champ à flux conservatif et l'écart entre les lignes de champ est le même dans l'aimant est dans l'entrefer, donc $B_a = B_e = B_M$. On a donc :

$$\boxed{M_0 = \left(1 + \frac{2e}{b}\right)\frac{B_M}{\mu_0}} \text{ soit } \boxed{M_0 = 9{,}1\ 10^5\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}}$$

3) La fonction $B_r(\alpha)$ est périodique, de période π et impaire. Le terme fondamental de son développement en série de Fourier est donc de la forme : $\boxed{B_1 \sin(2\alpha)}$

4) Le rotor « entraîne » le champ rotorique dans sa rotation donc le champ vaut

$$\boxed{\vec{B}_R(\alpha, t) = B_1 \sin\big(2(\alpha - \theta(t))\big)\vec{e}_\rho}$$

5.i) L'énergie magnétique contenue dans l'entrefer vaut $W_m = \iiint\limits_{\text{entrefer}} \dfrac{\left(\vec{B}_S + \vec{B}_R\right)^2}{2\mu_0}\mathrm{d}\tau$ soit

$$W_m = \int_0^{2\pi} \frac{\big(B_0\cos(\omega t - p\alpha) + B_1\sin(2(\alpha - \theta))\big)^2}{2\mu_0} hea\,\mathrm{d}\alpha$$ qui se décompose en trois parties selon

$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3}$ avec $W_{m1} = \dfrac{hea}{2\mu_0}B_0^2 \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - p\alpha)\mathrm{d}\alpha = \dfrac{\pi hea}{2\mu_0}B_0^2$, puisque p est un entier.

$$W_{m2}=\frac{hea}{2\mu_0}B_1^2\int_0^{2\pi}\sin^2\left(2(\alpha-\theta)\right)\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi hea}{2\mu_0}B_1^2\,.$$

$$W_{m3}=\frac{hea}{\mu_0}B_0B_1\int_0^{2\pi}\sin\left(2(\alpha-\theta)\right)\cos\left(\omega t-p\alpha\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$W_{m3}=\frac{hea}{2\mu_0}B_0B_1\left(\int_0^{2\pi}\sin\left(2(\alpha-\theta)+\omega t-p\alpha\right)\mathrm{d}\alpha+\int_0^{2\pi}\sin\left(2(\alpha-\theta)-\omega t+p\alpha\right)\mathrm{d}\alpha\right)$$, soit

$$W_{m3}=\frac{hea}{2\mu_0}B_0B_1\left(\int_0^{2\pi}\sin\left((2-p)\alpha-2\theta+\omega t\right)\mathrm{d}\alpha+\int_0^{2\pi}\sin\left((2+p)\alpha-2\theta-\omega t\right)\mathrm{d}\alpha\right).$$

La deuxième intégrale s'annule puisque p est un entier positif et la première n'est non nulle que si $p=2$. En supposant que $p=2$, on obtient : $W_{m3}=\dfrac{\pi hea}{\mu_0}B_0B_1\sin\left(\omega t-2\theta\right)$; soit au total

$$\boxed{W_m=\frac{\pi hea}{2\mu_0}\left(B_0^2+B_1^2+2B_0B_1\sin\left(\omega t-2\theta\right)\right)}$$

5.ii) L'énergie magnétique contenue dans le matériau ferromagnétique s'écrit

$W_{m4}=\displaystyle\iiint_{\text{matériau}}\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\mathrm{d}\tau$; elle est négligeable à cause de la grande valeur de μ_r.

5.iii) L'énergie magnétique contenue dans les aimants n'est pas fonction de l'angle θ.

6 Le couple électromagnétique subi par le rotor s'écrit $\Gamma_e=\left(\dfrac{\partial W_m}{\partial\theta}\right)_i$ soit ici

$$\boxed{\Gamma_e=-\frac{2\pi hea\,B_0B_1}{\mu_0}\cos\left(\omega t-2\theta\right)}.$$

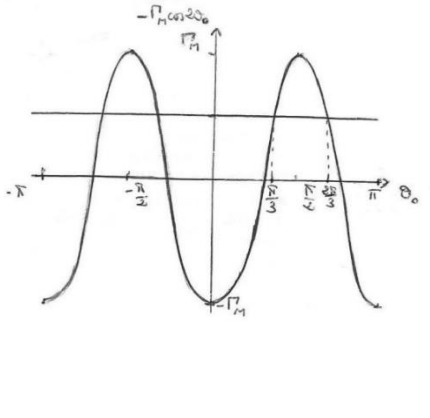
7) On a $\theta(t)=\Omega t+\theta_0$ donc $\Gamma_e=-\dfrac{2\pi hea\,B_0B_1}{\mu_0}\cos\left((\omega-2\Omega)t-2\theta_0\right)$ qui est une

fonction sinusoïdale du temps, de valeur moyenne nulle, sauf si $\boxed{\Omega=\dfrac{\omega}{2}}$.

On a alors $\boxed{\Omega=1500\ \mathrm{tr\cdot min^{-1}}}$ et $\boxed{\Gamma_e=-\dfrac{2\pi hea\,B_0B_1}{\mu_0}\cos\left(2\theta_0\right)}$.

8) Le couple est maximal pour $\boxed{\theta_0=\pm\dfrac{\pi}{2}}$ et on a $\boxed{\Gamma_M=\dfrac{2\pi hea\,B_0B_1}{\mu_0}=10{,}4\ \mathrm{N\cdot m}}$.

9) On obtient le tracé suivant :



Le couple est moteur lorsqu'il est positif, donc pour $-3\pi/4<\theta_0<-\pi/4$ ou $\pi/4<\theta_0<3\pi/4$.

Les aimants 1 et 3 jouent le même rôle. Il en est de même pour le 2 et le 4.

On pourra donc restreindre l'étude qui suit à

$0<\theta_0<\pi$.

10) Le moteur tournant à vitesse constante, le théorème du moment cinétique scalaire impose $\Gamma_r + \Gamma_e = 0$ soit $-\dfrac{\Gamma_M}{2} - \Gamma_M \cos(2\theta_0) = 0$ d'où $\cos(2\theta_0) = -\dfrac{1}{2}$. Les valeurs possibles pour θ_0 sont π/3 ou 2π/3 sur l'intervalle retenu.

Pour étudier la stabilité, on suppose que le moment du couple résistant augmente légèrement (en valeur absolue) à partir de sa valeur à l'équilibre. Dans ce cas le rotor est freiné ce qui correspond à une diminution de θ_0 à partir de π/3 ou 2π/3. Si la valeur initiale était $\dfrac{\pi}{3}$ alors le couple moteur $-\Gamma_M \cos(2\theta_0)$ diminue et le régime est instable. Par contre, si la valeur initiale était 2π/3, alors le couple moteur $-\Gamma_M \cos(2\theta_0)$ augmente et le régime correspondant est stable.

$\boxed{\text{Le fonctionnement est stable pour } \theta_0 = 2\pi/3.}$

II) Autopilotage

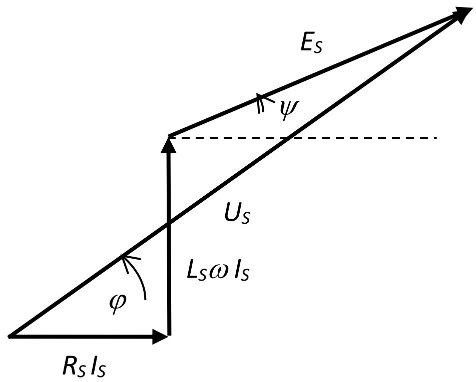
11) Puisque $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$ on a $\Phi(t) = \Phi_0 \cos(2\Omega t + 2\theta_0 + \beta)$ donc la fcem (opposée de la fem d'induction) vaut $e_S(t) = -\left(-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -2\Omega\Phi_0 \sin(2\Omega t + 2\theta_0 + \beta)$. Sa valeur efficace vaut $\boxed{E_S = \sqrt{2}\,\Phi_0 \Omega}$.

12) La pulsation du régime permanent doit être égale à celle de la fcem, donc $\omega = 2\Omega$ (on retrouve, bien sûr, la même relation qu'au I).

La loi des mailles s'écrit

$u_S(t) = R i_S(t) + L_S \dfrac{\mathrm{d}i_S}{\mathrm{d}t} + e_S(t)$ ou en notation complexe, en choisissant l'intensité $i_S(t)$ comme origine des phases :

$$U_S e^{j\varphi} = RI_S + jL_S\omega I_S + E_S e^{j\psi}$$



Le diagramme de Fresnel a donc l'allure ci-contre.

13) En négligeant le terme résistif, on obtient $U_S e^{j\varphi} = jL_S\omega I_S + E_S e^{j\psi}$. En prenant la partie réelle de cette expression, (ou en projetant le diagramme de Fresnel sur l'horizontale) on trouve la relation suivante

$$\boxed{U_S \cos\varphi = E_S \cos\psi}$$

14) On a $U_C = U_S \cos\varphi = E_S \cos\psi$ soit, avec $E_S = \sqrt{2}\,\Phi_0\Omega$, $U_C = \sqrt{2}\,\Phi_0 \Omega \cos\psi$ ou

$$\boxed{\Omega = \frac{U_C}{\sqrt{2}\,\Phi_0 \cos\psi} = \frac{U_C}{k}}$$

qui montre que la vitesse de rotation de l'arbre du moteur est proportionnelle à U_C.

15) Chaque convertisseur reçoit la puissance $U_C I_0$ soit au total la puissance $pU_C I_0$ ou $2U_C I_0$. En l'absence de perte, cette puissance est transformée en puissance mécanique $\Gamma\Omega$. On a donc $2U_C I_0 = \Gamma\Omega$ soit $\Gamma = \dfrac{2U_C I_0}{\Omega} = \dfrac{2\sqrt{2}\,\Phi_0 \Omega \cos\psi}{\Omega} I_0 = 2\sqrt{2}\,\Phi_0 \cos\psi\ I_0$ d'où $\boxed{\Gamma = 2k\, I_0}$