

## I. Stockage de déchets (CentraleSupélec PSI extrait)

Les parties suivantes étudient de manière extrêmement simplifiée la possibilité d'un stockage géologique de ces déchets, sous une couche argileuse d'épaisseur  $l = 50$  m (Figure 3). Les vecteurs seront notés en gras.

### II.A - Aspect thermique

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont très exothermiques. Le champ de température  $T(x, t)$  est supposé unidimensionnel, dans un cylindre d'argile (masse volumique  $\rho_a$ , conductivité thermique  $K_a$ , capacité calorifique massique  $c_a$ , diffusivité thermique  $D_T$ ) de section  $S$ . L'énergie thermique s'évacue suivant la loi de Fourier :

$$\mathbf{j}_T(x, t) = -K_a \text{grad}(T).$$

II.A.1) Quel est le nom et l'unité du vecteur  $\mathbf{j}_T(x, t)$  ?

II.A.2) Établir l'équation de la chaleur vérifiée par  $T(x, t)$ .

II.A.3) Relier  $D_T$  aux caractéristiques de l'argile.

II.A.4) Interpréter le résultat obtenu lorsqu'on remplace  $t$  par  $-t$  dans l'équation de la chaleur de la question II.A.2.

Après 30 ans d'entreposage en surface,  $N$  colis de déchets  $C$  sont uniformément répartis sur la surface  $S$  en  $(x, t) = (0, 0)$ . La puissance dégagée par un colis suit approximativement la loi  $p(t) = p_0 e^{-t/\tau}$  avec  $p_0 = 1$  kW et  $\tau = 43$  ans.

II.A.5) Interpréter les conditions aux limites :

$$T(x, 0) = T_0 ; T(l, t) = T_0 ; \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{Np(t)}{2K_a S}.$$

La solution  $T(x, t)$  est représentée sur l'annexe 1, au bout de 10, 40 et 100 ans, avec  $T_0 = 25^\circ \text{C}$ , dans le cas où la température maximale tolérée est de  $100^\circ \text{C}$ .

II.A.6) Compléter le diagramme de l'annexe 1 en identifiant les trois courbes et en justifiant rapidement.

II.A.7)  $K_a = 1,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . À partir de ce diagramme, expliquer comment on peut accéder à la surface nécessaire à l'enfouissement du stock des déchets  $C$  français, estimé à 36 000 colis. Donner une estimation numérique de cette surface.

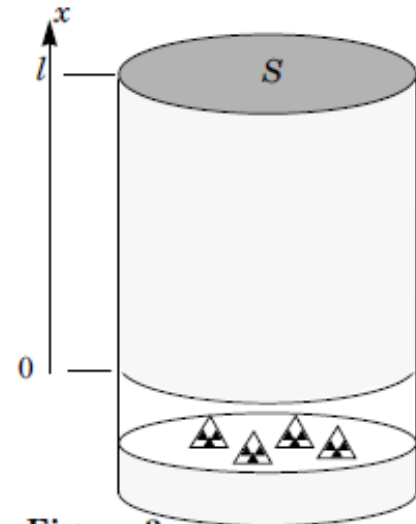
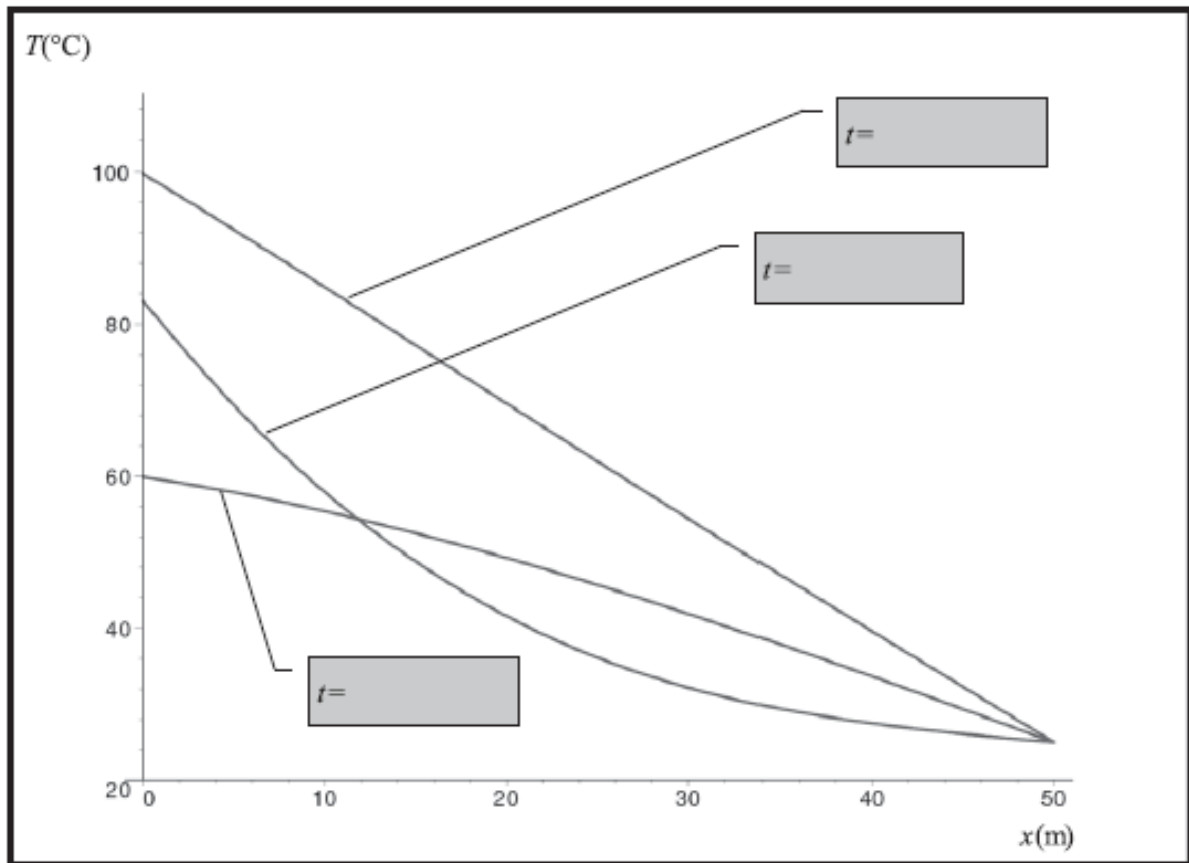
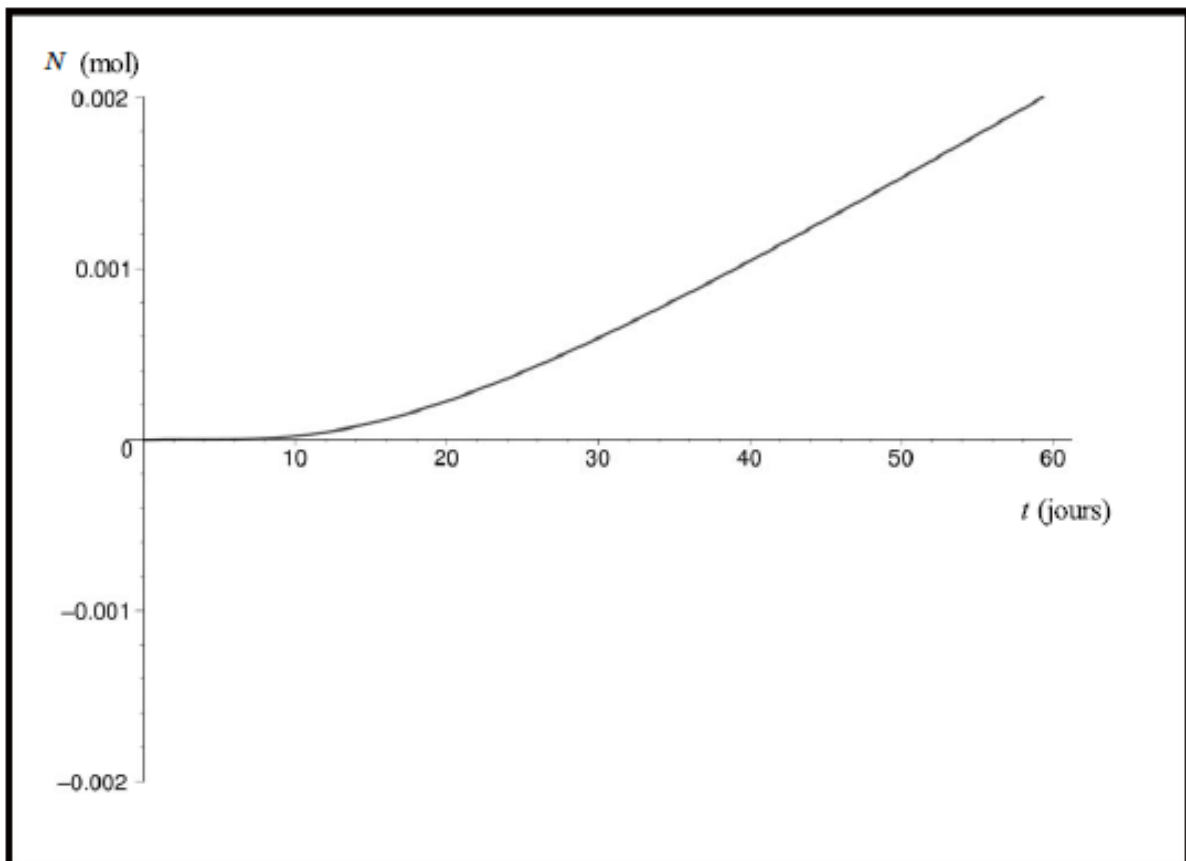


Figure 3

Annexe 1



Annexe 3



## II.C - Barrière géologique

On s'intéresse maintenant à une espèce non retenue au voisinage du colis. Cette espèce est alors susceptible de diffuser dans l'argile environnante. La géométrie utilisée est la même que dans la partie II.A (figure 3), et le problème est encore considéré unidimensionnel. On négligera ici la décroissance radioactive des concentrations.

Simultanément à la diffusion, une partie des déchets se fixe dans l'argile (phénomène de sorption). On écrit donc la concentration totale de l'espèce considérée (en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ) sous la forme  $c_t(x, t) = c(x, t) + c_f(x, t)$ , où  $c(x, t)$  et  $c_f(x, t)$  représentent respectivement la concentration en espèce mobile et la concentration en espèce fixée. Ces deux concentrations sont liées par  $c_f(x, t) = K_s c(x, t)$ , où  $K_s$  est une constante.

Le vecteur densité de courant de particules (en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) s'obtient alors par la loi de Fick, à partir de la concentration  $c(x, t)$  en espèce mobile  $j_c(x, t) = -D \text{grad}(c)$ , où  $D$  est le coefficient de diffusion (en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) de l'espèce mobile.

II.C.1) À l'aide d'un bilan de matière dans une tranche d'argile de section  $S$ , comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer que  $c(x, t)$  vérifie une équation de diffusion :

$$D' \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

où l'on exprimera  $D'$  en fonction de  $D$  et  $K_s$ .

On impose les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} c(0, t) &= C_0 \\ c(l, t) &= 0 \\ c(0 < x < l, 0) &= 0 \end{aligned}$$

II.C.2) Justifier que la solution  $c_0(x)$  de l'équation de la diffusion en régime permanent soit une fonction affine de  $x$ . Expliciter complètement cette solution. On pose  $c(x, t) = c_0(x) - c'(x, t)$ .

II.C.3) Donner l'équation et les conditions aux limites vérifiées par  $c'(x, t)$ . On cherche pour  $c'$  une solution de la forme  $c'(x, t) = f(x)g(t)$  où  $f(x)$  et  $g(t)$  sont deux fonctions à déterminer.

II.C.4) Montrer que  $g(t)$  est nécessairement de la forme  $Ae^{-t/\tau}$ , où  $A$  et  $\tau$  sont deux constantes. Justifier  $\tau > 0$ .

II.C.5) En déduire la forme de  $f(x)$ . En tenant compte des conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = l$ , montrer que  $\tau$  ne peut prendre que les valeurs discrètes  $\tau_n = \tau_1/n^2$ , où  $n$  est un entier non nul, et préciser la valeur de  $\tau_1$  en fonction de  $D'$  et  $l$ .

La fonction  $c_0^*(x)$ , périodique de période  $2l$ , impaire, et qui coïncide sur  $]0, l[$  avec  $c_0(x)$  admet comme développement en série de Fourier :

$$c_0^*(x) = \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right).$$

II.C.6) Vérifier soigneusement que

$$c(x, t) = \left[ c_0(x) - \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \right]$$

est solution de ce problème de diffusion.

II.C.7) Donner l'expression littérale du flux  $\phi(l, t)$  à travers la surface  $S$ , en  $x = l$ .

II.C.8) En déduire la quantité de matière  $N(t)$  évacuée à la surface entre 0 et  $t$ ; on donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

II.C.9) Montrer que  $N(t)$  admet une asymptote pour  $t \gg \tau_1$ , dont les paramètres permettent de déterminer les valeurs de  $D$  et de  $D'$ .

La courbe expérimentale de l'Annexe 3 a été réalisée pour une expérience modèle de diffusion des cations lithium  $Li^+$  dans une argile, avec  $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $S = 30 \text{ cm}^2$  et  $l = 0,5 \text{ cm}$ .

II.C.10) En déduire graphiquement les valeurs numériques de  $D$  et  $D'$ . Calculer  $K_s$ .

II.C.11) Déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire au lithium pour atteindre la biosphère, que l'on considérera distante de 50 m. Quel serait ce temps en l'absence de sorption ?

## II. Résolution de problème : La musaraigne étrusque



*Sarcophage de musaraigne étrusque*  
*Egypte 26<sup>ème</sup> Dynastie – 650 avant JC*



*Musaraigne étrusque*

Le plus petit mammifère terrestre vivant en milieu tempéré est la *musaraigne étrusque*. Sa température corporelle intérieure est  $T_i = 37\text{ °C}$ . Sa masse vaut environ deux grammes. L'animal possède une fourrure de masse négligeable d'épaisseur  $e = 1\text{ mm}$ , de conductivité thermique  $\lambda = 0.01\text{ W/m/K}$ .

Donner une estimation de la puissance thermique dégagée par l'animal.