

EXERCICE 1 : Ruissellement d'eau sur une stalactite (Centrale-Supélec 2009 extrait)

Le ruissellement d'eau sur une surface est un phénomène très courant (Partie I) qui joue un rôle essentiel dans la formation de stalactites. Ainsi, sur la voûte d'une grotte où ruisselle une eau chargée en carbonate de calcium, des concrétions de calcaire appelées stalactites peuvent se former et croître à partir de la voûte (cf. figure 1) par précipitation du carbonate de calcium selon la réaction chimique :



De même lorsque de l'eau de pluie ruisselle en hiver sur un garde-corps, on observe souvent la formation de stalactites de glace (figure 2).

Figure 1

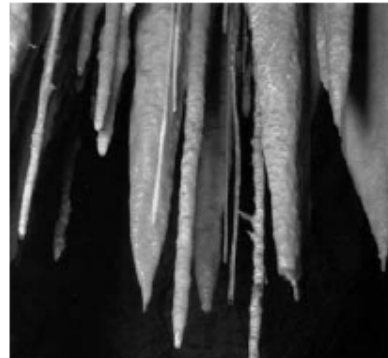


Figure 2



Dans tout le problème, le référentiel terrestre est supposé galiléen, $\vec{e}_z$ est un vecteur-unitaire orienté selon la verticale descendante et le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_z$ est uniforme avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On prendra garde à ne pas confondre $\vec{e}_z$ et le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ qui est introduit dans certaines parties pour repérer la direction perpendiculaire à l'écoulement.

I.A - Étude d'un écoulement modèle

On étudie dans un premier temps un écoulement incompressible et stationnaire d'eau (masse volumique μ et viscosité dynamique η uniformes et constantes) sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale (cf. figure 3). On note h l'épaisseur du film liquide à l'abscisse x , supposée uniforme et constante et on cherche un champ des vitesses de la forme $\vec{u}(M) = u(x, z)\vec{e}_x$.

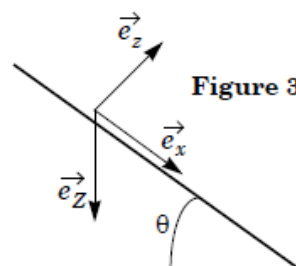


Figure 3

I.A.1) Montrer que $u(x, z)$ ne dépend pas de x .

Ecrire alors la relation fondamentale appliquée à la particule de fluide en explicitant les différentes forces qui s'appliquent et en montrant que l'accélération est nulle.

I.A.2) Expliciter la projection de cette équation sur l'axe z et en déduire l'expression de la pression en fonction de h, z, μ, g, P_0 (pression imposée par l'atmosphère à l'interface) et θ .

I.A.3) Établir l'équation différentielle dont est solution $u(z)$ et en déduire son expression en fonction de z, g, θ de la viscosité cinématique $\nu = \eta/\mu$ et de deux constantes d'intégration.

I.A.4) Quelle est la condition aux limites imposée par le plan incliné en $z = 0$? On néglige la viscosité de l'air. En considérant un élément de surface dS de l'interface eau-air sans masse, justifier la condition aux limites :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(z=h)} = 0.$$

I.A.5) Acheter la détermination de $u(z)$ en fonction de $\theta, g, \nu = \eta/\mu, z$ et h .

I.A.6) En déduire que le débit volumique pour une profondeur b selon $\vec{e}_y$ vaut :

$$q = \frac{g \sin \theta h^3 b}{3\nu} \quad (1)$$

I.B - Application aux stalactites

On étudie désormais l'écoulement d'eau le long d'une stalactite réelle d'axe OZ et de rayon $R(Z)$ pour laquelle on peut définir un angle $\theta(Z)$ local (cf. figure 4) sur des échelles de temps telles que la croissance de la stalactite est imperceptible : $R(Z)$ et $\theta(Z)$ ne dépendent pas du temps.

Du fait que $h(Z) \ll R$ et que R et θ varient doucement avec Z , on peut exprimer le débit volumique $q(Z)$ à travers le plan de cote Z à l'instant t en utilisant l'expression (1) établie en I.A.6) en y remplaçant b par $2\pi R(Z)$.

I.B.1) À quel endroit de la stalactite l'expression de $q(Z)$ ainsi obtenue est-elle erronée ?

I.B.2) Le débit $q(Z=0) = q_0$ en haut de la stalactite est supposé indépendant du temps. Proposer une méthode de mesure expérimentale de q_0 .

I.B.3) Montrer que l'épaisseur du film h est de la forme :

$$h = l_c^{4/3} (R \sin \theta)^{-1/3} \quad (2)$$

où l_c est une longueur caractéristique qu'on exprimera en fonction de q_0, g, ν .

I.B.4) Pour une stalactite de calcaire on prend $q_0 = 50 \text{ mL} \cdot \text{h}^{-1}$, $R_0 = R(Z=0) = 5 \text{ cm}$ et $\theta(Z=0) = \pi/2$. La viscosité cinématique de l'eau vaut $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer $l_c, h_0 = h(Z=0)$ et la vitesse moyenne $u_m(Z=0)$ définie comme la vitesse d'un écoulement uniforme qui aurait le même débit volumique.

I.B.5) Expliciter un nombre de Reynolds associé à cet écoulement en adoptant h_0 comme distance caractéristique. Le calculer numériquement avec les valeurs de la question I.B.4. Commenter.

I.B.6) Le modèle n'est valable que si $h/R < 10^{-1}$. Quelle condition numérique en déduit-on sur R ?

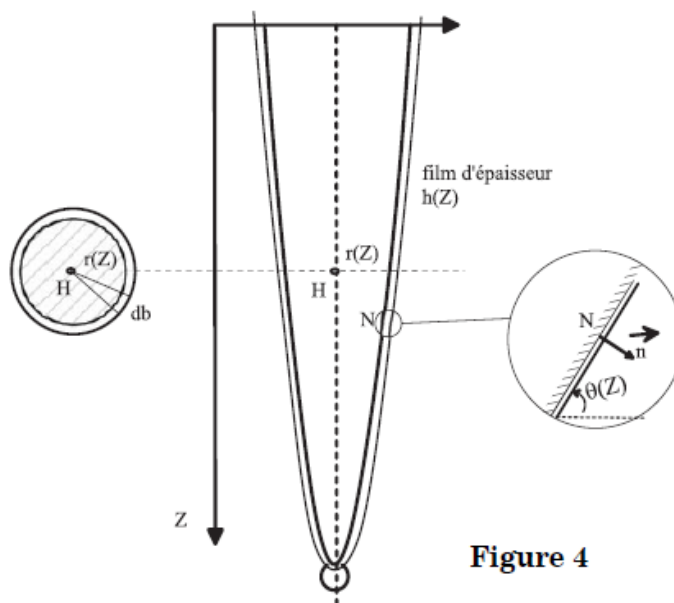


Figure 4

EXERCICE 2 : Couche limite (Centrale- Supélec 2011 Extrait)

On se propose d'évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite (affectée par la viscosité) au voisinage d'une plaque plane sur laquelle arrive un écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{x}$ parallèle à la plaque.

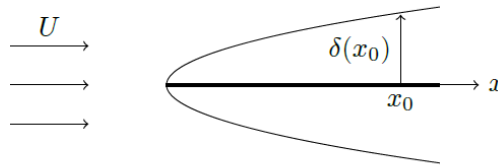


Figure 1

Cette zone qui assure le raccordement entre la condition de vitesse nulle contre la plaque et l'écoulement uniforme, s'établit par diffusion perpendiculairement à la plaque à partir du moment où le fluide aborde l'extrémité de celle-ci.

Estimer l'ordre de grandeur $\delta(x_0)$ de l'épaisseur de la couche limite en tenant compte du fait que lorsque le fluide atteint l'abscisse x_0 , le phénomène diffusif, perpendiculairement à la plaque, s'est déjà produit pendant la durée x_0/U .

Rappeler l'expression du nombre de Reynolds si l'on prend x_0 comme dimension caractéristique d'écoulement : Re_{x_0} .

Exprimer $\delta(x_0)/x_0$ à l'aide de Re_{x_0} .

Proposer alors un critère de pertinence pour l'utilisation de la notion de couche limite.

On considère maintenant l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux d'abscisses $y = -d/2$ et $y = +d/2$. L'axe horizontal Ox définit la direction et le sens de l'écoulement tandis que l'axe Oy est vertical ascendant : $\vec{g} = -g\vec{y}$.

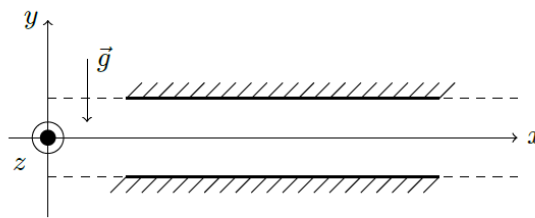


Figure 2

III.A – On considère une zone suffisamment éloignée de l'extrémité par laquelle le fluide aborde le dispositif pour ignorer tout phénomène d'entrée et faire comme si les parois étaient illimitées. On étudie alors un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ et un champ de pression $p(x, y)$.

III.A.1)

- Ecrire l'équation locale du mouvement de la particule de fluide et la projeter sur les deux axes
- En déduire que $\partial p / \partial x = K$ (constante).
- Donner la loi $v_x(y)$ en fonction de K , η , y et d . Montrer que le profil des vitesses est parabolique.

III.A.2) On note $\Delta p = p(x, y) - p(x + L, y)$ la différence de pression qui doit exister entre deux points de même altitude et distants de L selon Ox pour maintenir cet écoulement.

Établir l'expression du débit volumique D_V à travers une section de largeur h selon Oz en fonction de Δp , L , h , d et η .

Avec quelle loi électrique la relation entre Δp et D_V suggère-t-elle une analogie? Introduire une résistance hydraulique.

III.A.3) Si, en maintenant Δp , on divise d par 2, que devient le débit?

Quel débit total circule alors à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$, chacun étant soumis à la différence de pression Δp sur une longueur L ?

En déduire une différence importante avec la notion de résistance électrique.

III.B – On examine maintenant le phénomène d'entrée dans le dispositif précédent. Un fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_x$ pénètre dans l'intervalle situé entre deux plaques planes parallèles au plan xOz , distantes de d .

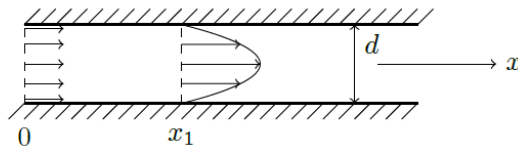
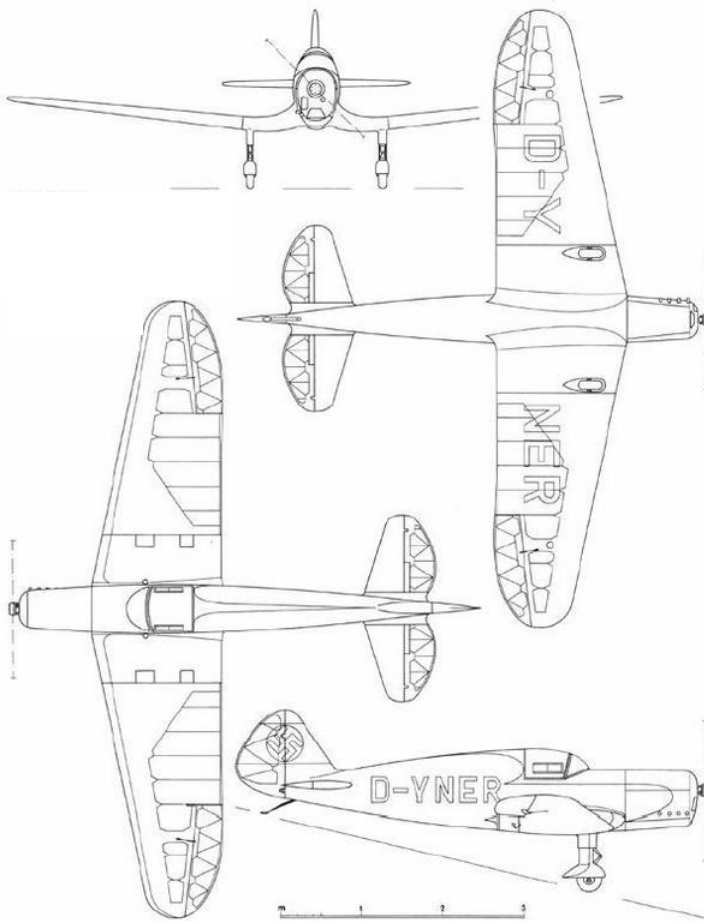


Figure 3

En exploitant le phénomène de croissance de couche limite à partir de l'arête de chaque plaque (cf. partie II), évaluer en fonction de U , d et ν , la distance x_1 parcourue par le fluide depuis son entrée dans le dispositif avant que s'établisse le profil parabolique de vitesse.

Montrer qu'on peut exprimer le rapport x_1/d à l'aide du nombre de Reynolds si l'on choisit judicieusement la dimension caractéristique de l'écoulement.

EXERCICE 3 - Performances d'un monomoteur



Quelques caractéristiques de l'avion Stomo 3V11 :

Masse au décollage : 340 kg

Surface des ailes : 9,6 m²

Puissance mécanique fournie par le moteur : 42 cv

Vitesse maximale (pleine puissance) : 215 km/h

Vitesse de montée : 50 km/h

En 1939, cet avion établit un record du monde international de vitesse sur 1000 km avec une moyenne de 187,78 km/h.

Autres données utilisables :

Masse volumique de l'air à 15 °C sous 1 bar :

$\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$

Rendement du moteur à hélice : 80 %

Rendement d'un moteur thermique : 30 %

1 cv = 736 W

Pouvoir calorifique de l'essence : 35 MJ.L⁻¹

Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

À partir de ces informations et de vos connaissances, évaluer les performances suivantes de l'avion :

- sa finesse $f = C_z/C_x$ à la vitesse maximale,
- son taux de montée $v_z = dz/dt$ au décollage,
- sa consommation en litre d'essence aux 100 km.

