TD N°24 - DIFFUSION THERMIQUE

EXERCICE 1 : ETUDE THERMIQUE D'UN CONDUCTEUR TORIQUE (Mines-Ponts MP extrait)

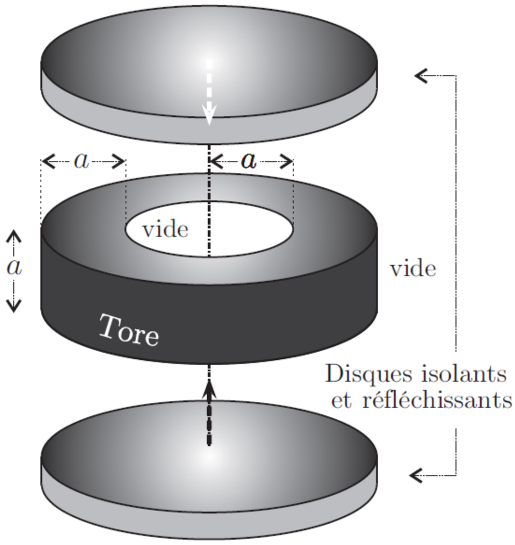

FIGURE 5 – Vue éclatée du système. L'axe (O,z) est celui du tore

Un tore de section carrée $a \times a$ et de rayon intérieur a (donc de rayon extérieur $2a$) est fabriqué dans un matériau de masse volumique μ, de capacité calorifique massique c et de conductivité thermique λ.

Le profil des températures possède la symétrie cylindrique : T ne dépend que du rayon r et du temps t soit $T(r,t)$. La face intérieure ($r = a$, $\theta \in [0,2\pi[$, $z \in [0,a]$) et la face extérieure ($r = 2a$, $\theta \in [0,2\pi[$, $z \in [0,a]$) sont placées dans le vide.

Sur les faces parallèles ($z = 0$ ou $z = a$), on pose deux disques parfaitement isolants thermiquement et de surface parfaitement réfléchissantes.

❏ **19** — En effectuant un bilan thermique sur la portion torique définie par l'intervalle $[r,r+dr]$, montrer que le champ des températures vérifie l'équation

$$\xi r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

où l'on exprimera ξ en fonction des grandeurs caractéristiques du matériau et l'on précisera son unité.

❏ **20** — On cherche, pour cette équation, une solution stationnaire à variables séparées sous la forme $T(r,t) = \rho(r)\eta(t)$. Établir les deux équations différentielles vérifiées respectivement par $\rho(r)$ et $\eta(t)$ en faisant apparaître une constante χ commune à ces deux équations.

❏ **21** — Déterminer l'expression de $\eta(t)$ sans chercher à caractériser la ou les constantes d'intégration. Quel est le signe de χ ?

❏ **22** — Pour la fonction $\rho(r)$, on cherche une solution développable en série entière sous la forme $\rho(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n$. Après avoir rapidement justifié cette recherche, déterminer les expressions des α_{2p} et des α_{2p+1} pour tout entier p positif ou nul.

❏ **23** — En examinant tous les transferts thermiques possibles sur la face interne, justifier le fait que $\left.\frac{d\rho}{dr}\right|_{r=a} = 0$.

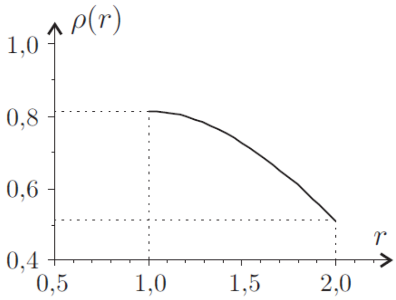

FIGURE 6 – La fonction $\rho(r)$

La fonction $\rho(r)$ qui admet le développement en série déterminé à la question 22 et qui vérifie la condition aux limites imposée par la question 23 s'exprime en utilisant les fonctions de Bessel de première (J) et de deuxième (Y) espèces. Elle s'écrit

$$\rho(r) = K\left[J_0(r) - \frac{J_1(a)}{Y_1(a)}Y_0(r)\right]$$

où K est une constante d'intégration. La courbe représentative de cette fonction sur le domaine d'étude et pour $K = 1$ et $a = 1$ fait l'objet de la figure 6.

❑ **24** — À un instant t donné, on suppose que la face externe, assimilée à un corps noir, est en quasi équilibre thermique. En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, établir la deuxième condition aux limites vérifiée par ρ en $r = 2a$. Montrer que l'on arrive alors à une contradiction. Quelle hypothèse doit-elle être remise en question ?

Loi de STEFAN-BOLTZMAN : La puissance surfacique rayonnée par un corps noir en équilibre thermique est donnée par la relation $j_{rayonnée} = \sigma T^4$, où $\sigma = 5{,}8\ 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4} est la constante de Stefan-Boltzmann et T la température (en K).

❑ **25** — En admettant que la solution précédente convienne malgré tout, décrire l'évolution de la température dans le tore au cours du temps en traçant sur un même graphique les profils des températures à diverses dates. Justifier en particulier le fait que T tend uniformément vers zéro.

EXERCICE 2 : EFFET DE PEAU THERMIQUE (e3a PSI – extrait)

Pour cette question, σ est une conductivité électrique en $\mathrm{S\cdot m^{-1}}$, η une viscosité dynamique, ρ une masse volumique, λ une conductivité thermique et c une capacité thermique massique.

B.1 Par analyse dimensionnelle, quelles sont les unités dans le système international de η, ρ, λ et c ? Vous justifierez vos résultats à partir de lois physiques très simples.

B.2 On note ω une pulsation en radians par seconde.

On définit les quantités $\sqrt{\dfrac{2}{\left(\dfrac{\rho c}{\lambda}\right)\omega}}$ et $\sqrt{\dfrac{2}{\left(\dfrac{\rho}{\eta}\right)\omega}}$. A quelle grandeur physique ces quantités sont-elles homogènes ? Justifier votre réponse.

B.3 On appelle μ_0 la perméabilité magnétique du vide. En utilisant la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que l'unité du produit $\sigma \cdot \mu_0$ est : $\mathrm{m}^n \cdot \mathrm{s}^p$ (m désigne l'unité du mètre et s l'unité de la seconde) où l'on donnera les valeurs numériques des entiers relatifs n et p. Etablir alors une longueur possible (notée δ) en fonction de μ_0, σ et ω.

B.4 Soit l'équation différentielle suivante $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2i\alpha^2 y(x) = 0$ où $i^2 = -1$ et α un réel positif.

Montrer que les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ae^{(1+i)\alpha \cdot x} + Be^{-(1+i)\alpha \cdot x}$. On pourra se servir de ce résultat pour la suite du problème.

Soit un milieu homogène de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique à pression constante c remplissant le demi-espace $z > 0$. Le problème est invariant par toute translation selon Ox et Oy.

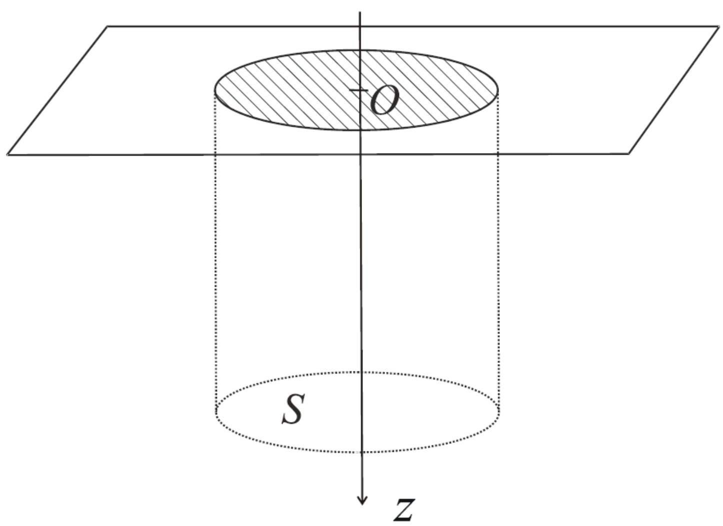

Figure 3 : géométrie du milieu semi-infini

B.15 En effectuant un bilan d'enthalpie sur une petite tranche d'épaisseur dz et de surface S (surface parallèle au plan $z = 0$), établir l'équation différentielle d'évolution de la température, dite « équation de la chaleur ». On posera $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$, appelée diffusivité thermique.

B.16 Quelle est l'unité de la quantité a ?

Le milieu homogène est un sol. Nous nous intéressons à des variations de température sinusoïdales dans le temps dont on notera ω la pulsation.

B.17 Justifier le fait que l'on puisse se limiter à l'étude de variations sinusoïdales de température.

B.18 Dans le sol, nous recherchons une solution sous la forme $T(z,t) = T_0 + \mathrm{Re}(\underline{f(z)} \cdot e^{i\omega t})$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f(z)}$, fonction *a priori* complexe ?

B.19 En introduisant la grandeur $\delta = \sqrt{\dfrac{2a}{\omega}}$, trouver l'expression générale physiquement acceptable de $\underline{f(z)}$.

B.20 Le sol a une diffusivité thermique moyenne $a_{sol} = 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Calculer la valeur numérique de δ dans les cas où l'on s'intéresse à des variations journalières de la température puis à des variations annuelles de la température.

B.21 Il est d'usage d'enterrer les canalisations à au moins 80 centimètres de profondeur. Justifier.