PSI* 2022 - 2023
TD N°6 - Diffusion (2)

EXERCICE 1 : Deux corps échangeant par l'intermédiaire d'une barre
Une barre (B) cylindrique d'axe (Ox), de longueur L, de section S, de chaleur massique c_B, de masse volumique μ et de conductivité thermique K est reliée (par ses extrémités) à deux corps $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de capacités calorifiques respectives C_1 et C_2, de températures initiales respectives $T_{0,1}$ et $T_{0,2}$.

L'ensemble {barre + $\mathcal{C}_1$ + $\mathcal{C}_2$} est parfaitement calorifugé.

On suppose que C_1 et C_2 sont très supérieures à la capacité calorifique de la barre $C_B = c_B\mu LS$.

On appelle $T_1(t)$ la température de $\mathcal{C}_1$ à l'instant t (de même pour $\mathcal{C}_2$) et $T(x, t)$ celle de la section d'abscisse x de la barre à l'instant t.

1) En appliquant le premier principe successivement aux corps $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, déterminer les équations reliant $\frac{\partial T}{\partial x}(0)$ à $T_1(t)$ d'une part et $\frac{\partial T}{\partial x}(L)$ à $T_2(t)$ d'autre part.

2) Rappeler l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$.
Compte tenu de l'hypothèse faite sur C_1, C_2 et C_B, on suppose que l'on peut considérer que l'équation de la chaleur se simplifie en $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. Déterminer alors T_1(t) et $T_2(t)$; on considérera pour simplifier les calculs que $C_1 = C_2$.

3) Justifier a posteriori l'hypothèse faite en comparant le temps caractéristique d'évolution de T_1(t) et de $T_2(t)$ à la durée caractéristique de la diffusion thermique dans la barre.

4) Compte tenu de l'hypothèse $c_B \approx 0$, que vaut la variation d'entropie d'une tranche de (B) comprise entre
x et $x+dx$, entre t et $t+dt$?

5) Calculer l'entropie échangée δS_e par cette tranche pendant la durée dt.

6) En déduire l'expression de s_C, entropie créée par unité de temps et de volume dans (B) en fonction de
T_1, T_2, K, L et x.

7) Intégrer cette expression d'abord sur toute la longueur de (B) puis sur toute la durée de la transformation
(c'est-à-dire jusqu'à $t = \infty$). En déduire que l'entropie créée dans toute la barre, pendant la durée de la
transformation est :

$$S_C = 2\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\ln\left(\frac{T_{0,1} + T_{0,2}}{2\sqrt{T_{0,1}T_{0,2}}}\right).$$

8) Calculer la variation d'entropie des corps $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ au cours de la transformation. Commenter.

EXERCICE 2 : Stockage de déchets (CentraleSupélec PSI extrait)

Les parties suivantes étudient de manière extrêmement simplifiée la possibilité d'un stockage géologique de ces déchets, sous une couche argileuse d'épaisseur $l = 50\ \text{m}$ (Figure 3). Les vecteurs seront notés en gras.

II.A - Aspect thermique

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont très exothermiques. Le champ de température $T(x,t)$ est supposé unidimensionnel, dans un cylindre d'argile (masse volumique ρ_a, conductivité thermique K_a, capacité calorifique massique c_a, diffusivité thermique D_T) de section S. L'énergie thermique s'évacue suivant la loi de Fourier :

$$\boldsymbol{j_T}(x,t) = -K_a \boldsymbol{grad}(T).$$

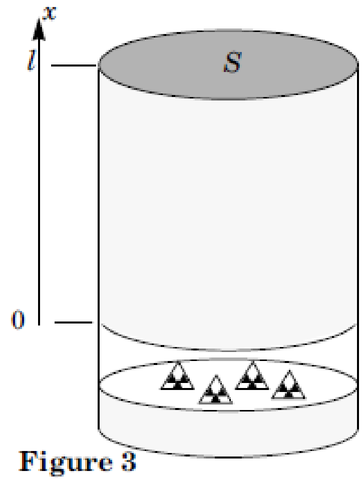


Figure 3

II.A.1) Quel est le nom et l'unité du vecteur $\boldsymbol{j_T}(x,t)$?

II.A.2) Établir l'équation de la chaleur vérifiée par $T(x,t)$.

II.A.3) Relier D_T aux caractéristiques de l'argile.

II.A.4) Interpréter le résultat obtenu lorsqu'on remplace t par $-t$ dans l'équation de la chaleur de la question II.A.2.

Après $30\ \text{ans}$ d'entreposage en surface, N colis de déchets C sont uniformément répartis sur la surface S en $(x,t) = (0,0)$. La puissance dégagée par un colis suit approximativement la loi $p(t) = p_0 e^{-t/\tau}$ avec $p_0 = 1\ \text{kW}$ et $\tau = 43\ \text{ans}$.

II.A.5) Interpréter les conditions aux limites :

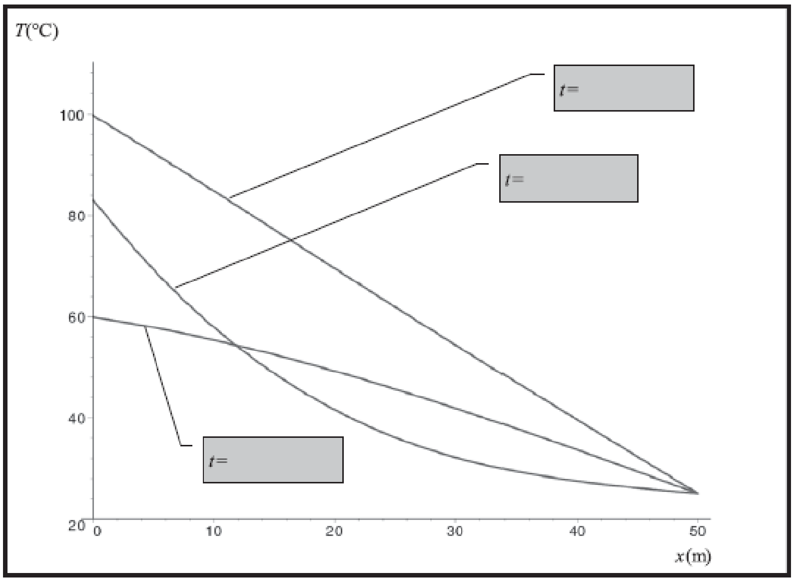
$$T(x,0) = T_0\ ;\ T(l,t) = T_0\ ;\ \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = -\frac{Np(t)}{2K_a S}.$$

La solution $T(x,t)$ est représentée sur l' annexe 1, au bout de 10, 40 et 100 ans, avec $T_0 = 25°\ \text{C}$, dans le cas où la température maximale tolérée est de $100°\ \text{C}$.

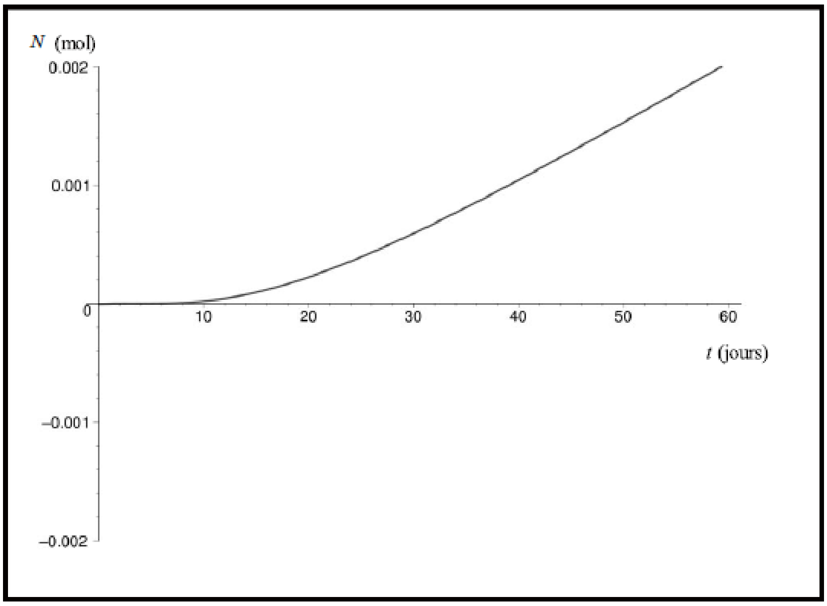
II.A.6) Compléter le diagramme de l'annexe 1 en identifiant les trois courbes et en justifiant rapidement.

II.A.7) $K_a = 1{,}5\ \text{W}\cdot K^{-1}\cdot \text{m}^{-1}$. À partir de ce diagramme, expliquer comment on peut accéder à la surface nécessaire à l'enfouissement du stock des déchets C français, estimé à $36\ 000$ colis. Donner une estimation numérique de cette surface.

Annexe 1



Annexe 3



II.C - Barrière géologique

On s'intéresse maintenant à une espèce non retenue au voisinage du colis. Cette espèce est alors susceptible de diffuser dans l'argile environnante. La géométrie utilisée est la même que dans la partie II.A (figure 3), et le problème est encore considéré unidimensionnel. On négligera ici la décroissance radioactive des concentrations.

Simultanément à la diffusion, une partie des déchets se fixe dans l'argile (phénomène de sorption). On écrit donc la concentration totale de l'espèce considérée (en $\mathrm{mol \cdot m^{-3}}$) sous la forme $c_t(x,t) = c(x,t) + c_f(x,t)$, où $c(x,t)$ et $c_f(x,t)$ représentent respectivement la concentration en espèce mobile et la concentration en espèce fixée. Ces deux concentrations sont liées par $c_f(x,t) = K_s c(x,t)$, où K_s est une constante.

Le vecteur densité de courant de particules (en $\mathrm{mol \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$) s'obtient alors par la loi de Fick, à partir de la concentration $c(x,t)$ en espèce mobile $\boldsymbol{j_c}(x,t) = -D\boldsymbol{grad}(c)$, où D est le coefficient de diffusion (en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$) de l'espèce mobile.

II.C.1) À l'aide d'un bilan de matière dans une tranche d'argile de section S, comprise entre x et $x+dx$, montrer que $c(x,t)$ vérifie une équation de diffusion :

$$D'\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

où l'on exprimera D' en fonction de D et K_s.

On impose les conditions aux limites :

$$c(0,t) = C_0$$
$$c(l,t) = 0$$
$$c(0 < x < l, 0) = 0$$

II.C.2) Justifier que la solution $c_0(x)$ de l'équation de la diffusion en régime permanent soit une fonction affine de x. Expliciter complètement cette solution.
On pose $c(x, t) = c_0(x) - c'(x, t)$.

II.C.3) Donner l'équation et les conditions aux limites vérifiées par $c'(x, t)$.
On cherche pour c' une solution de la forme $c'(x, t) = f(x)g(t)$ où $f(x)$ et $g(t)$ sont deux fonctions à déterminer.

II.C.4) Montrer que $g(t)$ est nécessairement de la forme $Ae^{-t/\tau}$, où A et τ sont deux constantes. Justifier $\tau > 0$.

II.C.5) En déduire la forme de $f(x)$. En tenant compte des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = l$, montrer que τ ne peut prendre que les valeurs discrètes $\tau_n = \tau_1/n^2$, où n est un entier non nul, et préciser la valeur de τ_1 en fonction de D' et l.

La fonction $c_0^*(x)$, périodique de période $2l$, impaire, et qui coïncide sur $]\,0, l\,[$ avec $c_0(x)$ admet comme développement en série de Fourier :

$$c_0^*(x) = \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right).$$

II.C.6) Vérifier soigneusement que

$$c(x, t) = \left[c_0(x) - \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)\right]$$

est solution de ce problème de diffusion.

II.C.7) Donner l'expression littérale du flux $\phi(l, t)$ à travers la surface S, en $x = l$.

II.C.8) En déduire la quantité de matière $N(t)$ évacuée à la surface entre 0 et t ; on donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

II.C.9) Montrer que $N(t)$ admet une asymptote pour $t \gg \tau_1$, dont les paramètres permettent de déterminer les valeurs de D et de D'.
La courbe expérimentale de l'Annexe 3 a été réalisée pour une expérience modèle de diffusion des cations lithium Li^+ dans une argile, avec $C_0 = 10^{-2}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$, $S = 30\ \mathrm{cm}^2$ et $l = 0,5\ \mathrm{cm}$.

II.C.10) En déduire graphiquement les valeurs numériques de D et D'. Calculer K_s.

II.C.11) Déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire au lithium pour atteindre la biosphère, que l'on considérera distante de $50\ \mathrm{m}$. Quel serait ce temps en l'absence de sorption ?