PSI 2024 - 2025*

TD N°6 - Effets de peau

L'effet de peau se rencontre en physique lorsqu'il y a absorption de l'énergie. Ce phénomène se retrouve dans des domaines très variés : électromagnétisme, diffusion thermique et mécanique des fluides visqueux par exemple.

PRELIMINAIRES

Pour cette question, σ est une conductivité électrique en $\mathrm{S \cdot m^{-1}}$, η une viscosité dynamique, ρ une masse volumique, λ une conductivité thermique et c une capacité thermique massique.

B.1 Par analyse dimensionnelle, quelles sont les unités dans le système international de η, ρ, λ et c ? Vous justifierez vos résultats à partir de lois physiques très simples.

B.2 On note ω une pulsation en radians par seconde.

On définit les quantités $\sqrt{\dfrac{2}{\left(\dfrac{\rho c}{\lambda}\right)\omega}}$ et $\sqrt{\dfrac{2}{\left(\dfrac{\rho}{\eta}\right)\omega}}$. A quelle grandeur physique ces quantités sont-elles homogènes ? Justifier votre réponse.

B.3 On appelle μ_0 la perméabilité magnétique du vide. En utilisant la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que l'unité du produit $\sigma \cdot \mu_0$ est : $\mathrm{m}^n \cdot \mathrm{s}^p$ (m désigne l'unité du mètre et s l'unité de la seconde) où l'on donnera les valeurs numériques des entiers relatifs n et p. Etablir alors une longueur possible (notée δ) en fonction de μ_0, σ et ω.

B.4 Soit l'équation différentielle suivante $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2i\alpha^2 y(x) = 0$ où $i^2 = -1$ et α un réel positif. Vérifier que les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ae^{(1+i)\alpha \cdot x} + Be^{-(1+i)\alpha \cdot x}$.

Les questions B.5 à B.14 ci-dessous seront traitées après le cours d'électromagnétisme

EFFET DE PEAU EN ELECTROMAGNETISME

On considère un fil de cuivre cylindrique de rayon R et de longueur L très grande devant le rayon R.

Ce fil est placé dans le vide. On note σ_0 sa conductivité électrique supposée constante. On appelle (Oz) l'axe du fil de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$.

On prendra $\sigma_0 = 6{,}2 \cdot 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$; $\varepsilon_0 = 8{,}84 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

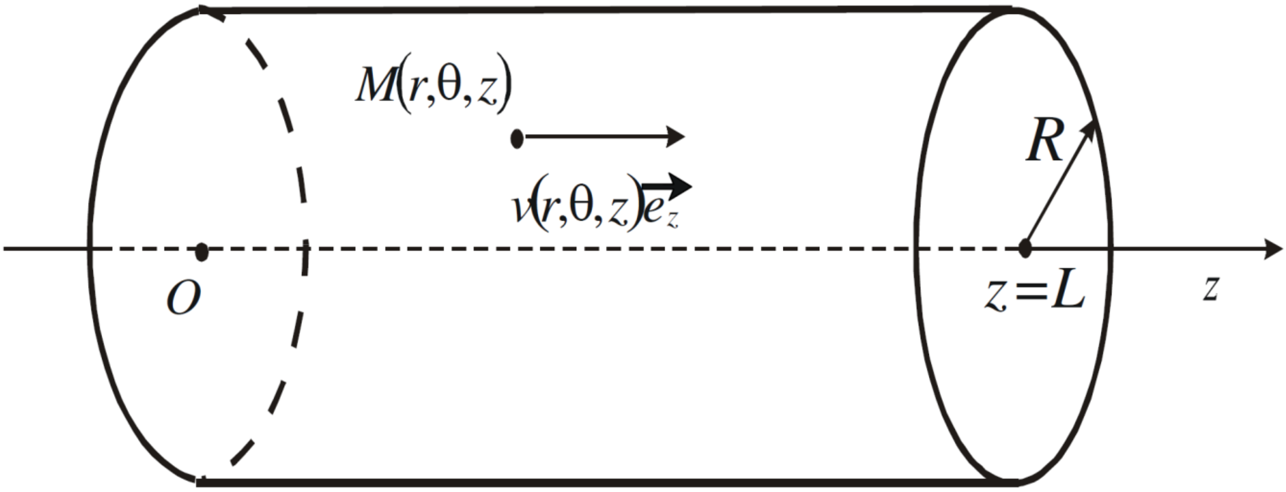

Figure 1 : géométrie du fil de cuivre

B.5 On applique une différence de potentiel U constante entre les deux extrémités du fil de cuivre. En supposant que le champ électrique créé dans le cuivre est uniforme, donner l'expression littérale de la norme J du vecteur densité volumique de courant en fonction de σ_0, U et L.

B.6 Calculer alors l'intensité du courant traversant le fil de cuivre et en déduire l'expression littérale de la résistance électrique $R_{élec}$ de ce fil de cuivre.

Application numérique : calculer la résistance linéique R_{lin} de ce fil de section $2{,}5\ \text{mm}^2$.

B.7 Dans la suite du problème, un courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ traverse le fil de cuivre. La fréquence du courant est inférieure au térahertz ($1\ \text{THz} = 10^{12}\ \text{Hz}$). Montrer que l'on peut alors négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère.

B.8 Etablir que le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ satisfait à l'équation différentielle suivante : $\Delta \vec{j} = \xi \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ où l'on exprimera ξ en fonction des données du problème.

Pour traiter la question précédente, on montrera (ou on admettra) que le conducteur est localement neutre

B.9 Les symétries du problème permettent d'écrire le vecteur densité volumique de courant sous la forme complexe $\underline{\vec{j}} = J_0(r) \cdot e^{i\omega t} \vec{e}_z$ où $i^2 = -1$ et r est la distance d'un point M du fil par rapport à l'axe. On rappelle que $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe (Oz). L'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques est donnée à la fin du sujet. Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $J_0(r)$. On introduira la quantité $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\sigma_0 \mu_0 \omega}}$.   On donne $\Delta\vec{j} = (\frac{d^2 J_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_0}{dr}) e^{i\omega t}\overrightarrow{e_z}$

B.10 Calculer δ à la fréquence de 1 GHz. Comparer cette grandeur au rayon du fil de cuivre de section $2{,}5\ \text{mm}^2$.

B.11 La résolution de l'équation différentielle obtenue à la question **B.9** n'est pas demandée ici. On admettra donc que la densité de courant diminue lorsque l'on se rapproche de l'axe du cylindre (le rayon r diminue donc). La distance caractéristique sur laquelle se réalise cette décroissance est naturellement δ. On propose donc le modèle suivant : la conductivité électrique est une fonction exponentielle de la distance r : $\sigma(r) = \sigma_0 \cdot e^{\frac{r-R}{\delta}}$.

Tracer l'allure de la fonction $\sigma(r)$. Tracer la tangente à la courbe en $r = R$. Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ?

B.12 Justifier le fait que, en haute fréquence, on utilise des câbles formés de multiples brins de cuivre très fins isolés électriquement les uns des autres (appelés fils de Litz).

B.13 On se propose maintenant de calculer la résistance du fil avec le modèle de conductivité variable. On découpe la section circulaire du fil de cuivre en éléments de surface annulaires de largeur dr et de longueur $2\pi r$. On découpe ainsi le fil en éléments de volume.

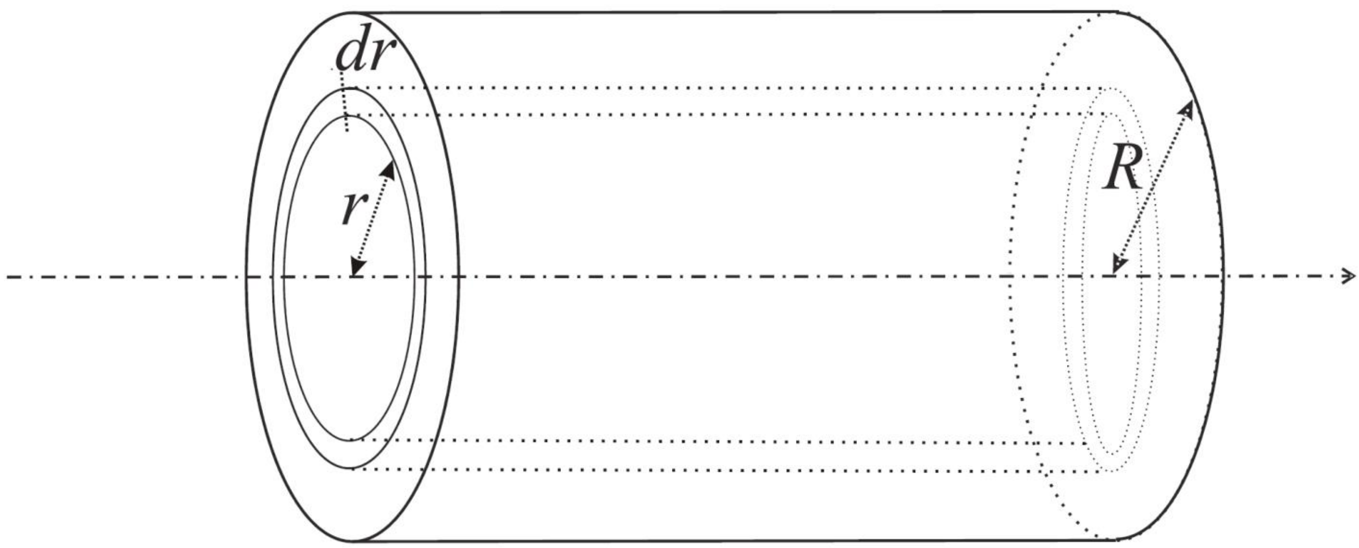

Figure 2 : découpage en volumes élémentaires

Quelle est la conductance électrique élémentaire dG d'un tel élément de volume ? On l'exprimera en fonction de r, $\sigma(r)$, dr et L.

B.14 Comment sont branchés entre eux ces éléments de volume ? En déduire la conductance totale G du fil en fonction de δ, R, L, σ_0

Commenter cette expression si δ est petit devant R

EFFET DE PEAU EN THERMODYNAMIQUE

Soit un milieu homogène de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique à pression constante c remplissant le demi-espace $z > 0$. Le problème est invariant par toute translation selon Ox et Oy.

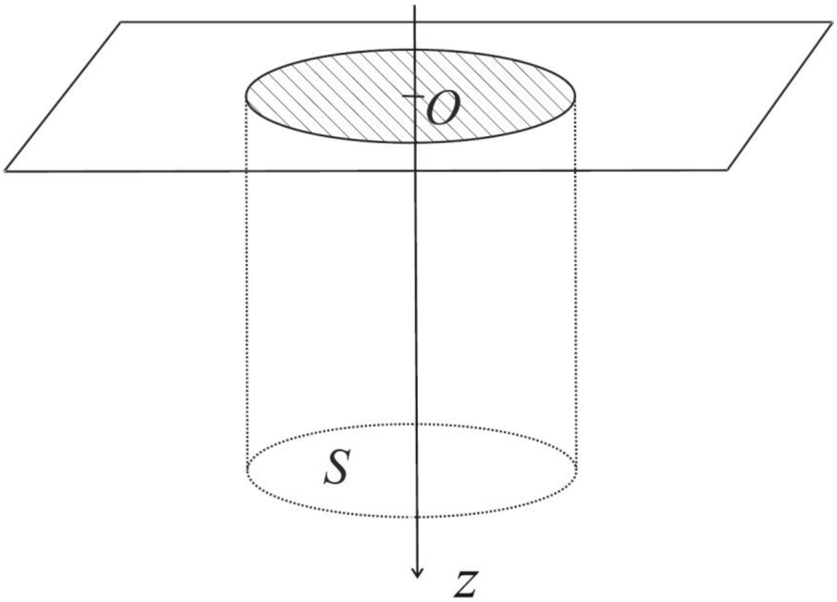

Figure 3 : géométrie du milieu semi-infini

B.15 En effectuant un bilan d'enthalpie sur une petite tranche d'épaisseur dz et de surface S (surface parallèle au plan $z = 0$), établir l'équation différentielle d'évolution de la température, dite « équation de la chaleur ». On posera $a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$, appelée diffusivité thermique.

B.16 Quelle est l'unité de la quantité a ?

Le milieu homogène est un sol. Nous nous intéressons à des variations de température sinusoïdales dans le temps dont on notera ω la pulsation. La notation complexe sera une nouvelle fois utilisée.

B.17 Justifier le fait que l'on puisse se limiter à l'étude de variations sinusoïdales de température.

B.18 Dans le sol, nous recherchons une solution sous la forme $T(z,t) = T_0 + \mathrm{Re}(\underline{f(z)} \cdot e^{i\omega t})$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f(z)}$, fonction *a priori* complexe ?

B.19 En introduisant la grandeur $\delta = \sqrt{\dfrac{2a}{\omega}}$, trouver l'expression générale physiquement acceptable de $\underline{f(z)}$.

B.20 Le sol a une diffusivité thermique moyenne $a_{sol} = 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Calculer la valeur numérique de δ dans les cas où l'on s'intéresse à des variations journalières de la température puis à des variations annuelles de la température.

B.21 Il est d'usage d'enterrer les canalisations à au moins 80 centimètres de profondeur. Justifier.

EFFET DE PEAU EN MECANIQUE DES FLUIDES

Considérons une plaque plane, infinie en longueur et largeur, formant le plan xOy. Un fluide visqueux incompressible (par exemple du miel) de viscosité η est déposé sur cette plaque sur une grande épaisseur h. Le fluide occupe alors le demi-espace $z>0$ (tout se passe comme si l'espace était illimité). La plaque oscille à la pulsation ω, sa vitesse étant $\vec{V}_{plaque} = V_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$. On néglige les phénomènes de pesanteur.

La pression dans le fluide est supposée être indépendante des variables x et y.

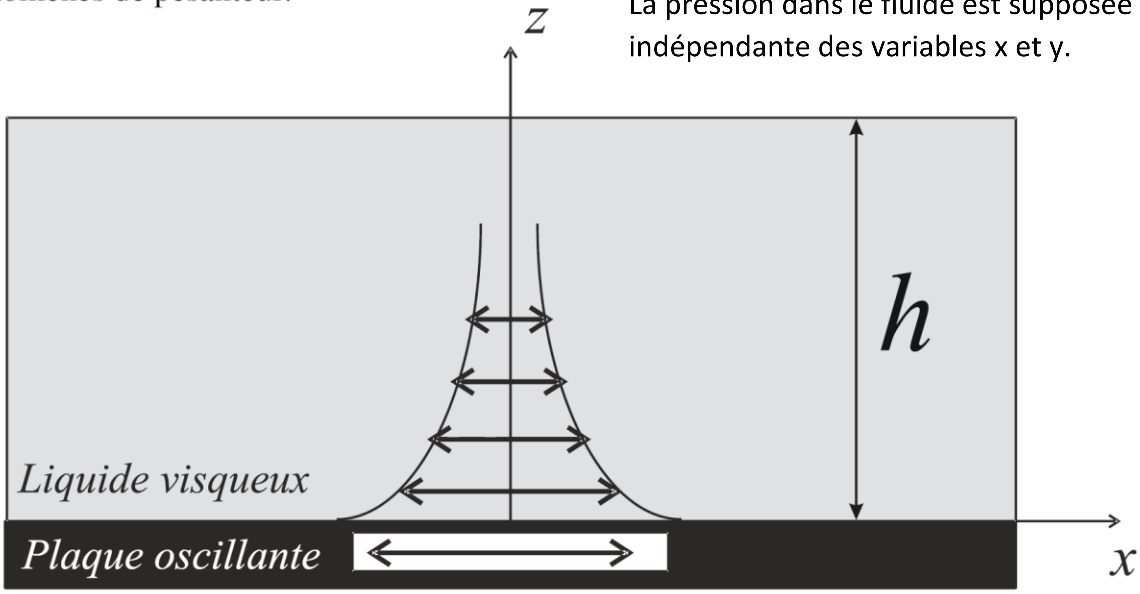

Figure 4 : géométrie de l'écoulement induit

On donne alors l'équation de Navier-Stockes :

$\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}) = -\overrightarrow{grad}(P) + \eta\vec{\Delta}\vec{v}$; rappeler la signification des différents termes de cette équation.

B.22 En analysant les invariances et symétries du système et en supposant que la vitesse du fluide est parallèle à celle de la plaque, de quelles variables peut dépendre le champ de vitesse ?

B.23 Montrer que le terme convectif $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ est nul pour ce problème. En déduire alors que la pression dans le fluide est une fonction affine de la cote z et que le champ de vitesse satisfait à l'équation différentielle suivante $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu_c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ où l'on exprimera ν_c en fonction de ρ et de η. (pour information, ν_c est appelée viscosité cinématique).

B.24 On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme $\underline{v} = \underline{f(z)} \cdot e^{i\omega t} \cdot \vec{e}_x$. Donner la forme générale de $\underline{f(z)}$; on introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2\nu_c}{\omega}}$. En étudiant le comportement aux limites du fluide, donner l'expression du champ de vitesse réel dans le fluide. Commenter l'expression obtenue.

B.25 Dans le cas d'un fluide mille fois plus visqueux que l'eau (on rappelle que la viscosité de l'eau est de $10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}$) et pour une fréquence de 2 Hz, calculer la valeur numérique de la distance caractéristique d'atténuation δ en prenant comme masse volumique la masse volumique de l'eau.

B.26 Les roches en fusion dans le manteau terrestre sont extrêmement visqueuses et ont une masse volumique très grande, si bien que leur viscosité cinématique ν_c est de l'ordre de $\nu_c \approx 10^{-2}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$. En déduire une propriété importante pour les ondes sismiques de cisaillement qui ont des fréquences de quelques hertz.