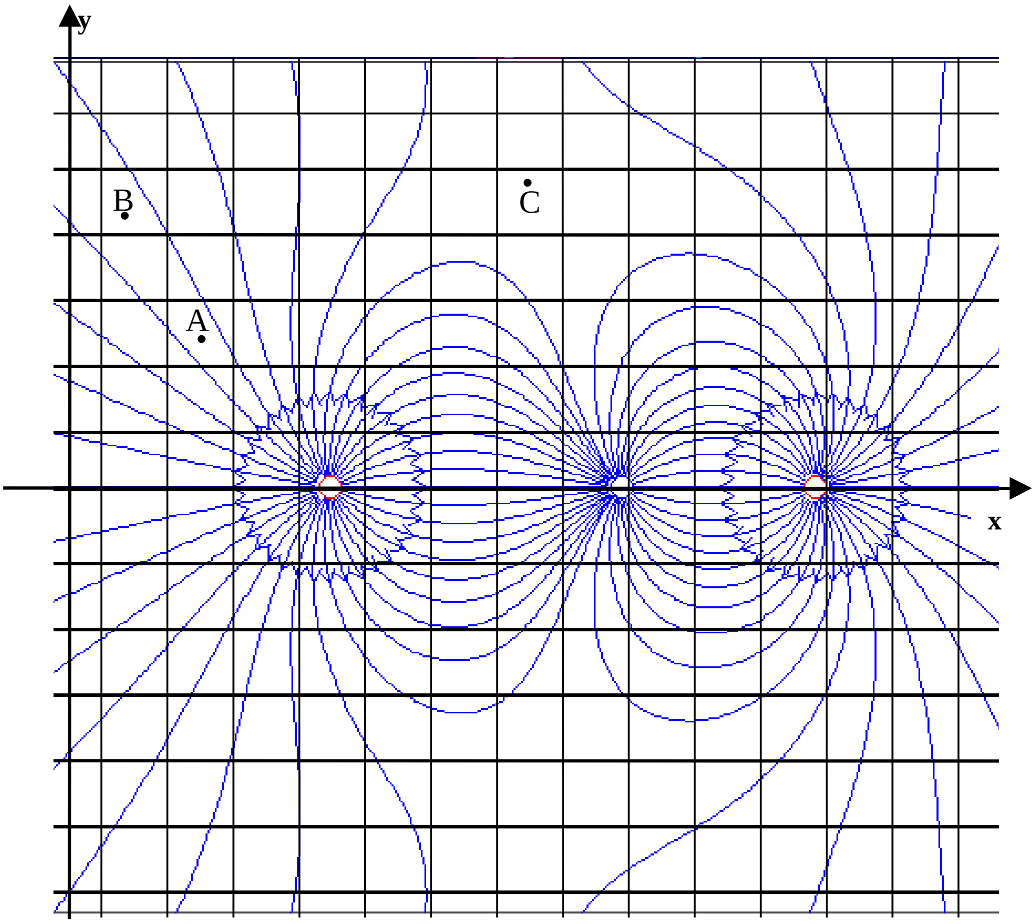
PSI* 2018 – 2019
TD N°6 - ELECTROSATIQUE

EXERCICE 1 : Lignes de champ

La figure ci-dessous représente les lignes du champ électrostatique créé par des fils très longs, uniformément chargés, perpendiculaires au plan de la figure.

1) Où sont situés les intersections des fils avec le plan de la figure ?
2) Quel est le signe de la densité de charge de chacun d'entre eux ?
3) Quel est le signe de la charge totale ?
4) La norme du champ en A est de 100 $V.m^{-1}$. Calculer une valeur approchée du champ en B
5) Que peut-on dire approximativement du champ au voisinage du point C ?



EXERCICE 2 : Solutions colloïdales

Les colloïdes, ou solutions colloïdales, sont constitués d'un solvant dans lequel est introduit un corps, généralement solide, qui se disperse sous forme de « particules » dont la taille peut varier entre 10 et 100 nm.

Ces « particules » sont des macromolécules ou des agrégats de petites molécules qui s'ionisent dans le milieu.

Ainsi le plasma sanguin ou le blanc d'œuf sont des solutions colloïdales où les « particules » sont respectivement l'hémoglobine ou l'albumine.

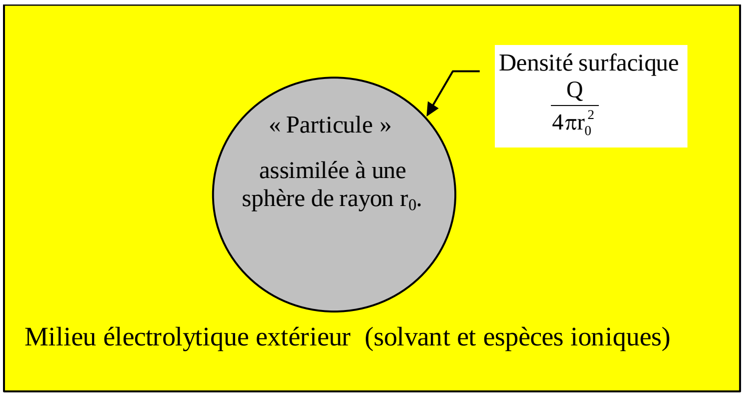
Certaines solutions colloïdales sont utilisées en médecine ; les « particules » sont alors constituées d'agrégats de radioéléments destinés au diagnostic ou au traitement des tumeurs. D'autres encore sont utilisées en parfumerie, dans les lessives (tensio-actifs et détergents) ou en agro-alimentaire (élimination de suspension dans les jus par exemple), etc.

Nous nous proposons de réaliser une étude électrostatique simple d'un tel milieu.
On suppose que ces « particules » ont une taille grande devant celles des ions qui les environnent.
Ces ions sont ceux d'une eau (plus ou moins pure) constituant l'électrolyte de la solution.
Ils sont supposés quasi ponctuels ; ils portent une charge $\pm$ e et ont une densité volumique N_0 au repos, identique pour les cations et les anions (neutralité locale de l'électrolyte).

Lorsqu'ils sont soumis à un potentiel électrostatique local en M, V(M), les ions se répartissent selon la loi de BOLTZMANN :

$$\frac{N_+(M)}{N_0} = \exp(-\frac{eV(M)}{k_B T}),\quad \frac{N_-(M)}{N_0} = \exp(-\frac{-eV(M)}{k_B T}),$$

où k_B est la constante de BOLTZMANN et T la température absolue.
$N_+(M)$ est la densité volumique de cations et $N_-(M)$ celle des anions.
La population des « particules » est ici considérée comme suffisamment diluée dans la solution pour que le champ et le potentiel électrostatiques à leur voisinage ne soient créés que par l'une d'elle et par les ions qui l'environnent.
Ces « particules » portent la charge Q que l'on suppose uniformément répartie à la surface d'une sphère de rayon r_0.
La permittivité du milieu est $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, avec $\varepsilon_r = 80$, et on admet que l'on peut remplacer dans les équations ε_0 par ε.



On ne s'intéresse ici qu'à des rayons $r \geq r_0$.

1. Densité de charge

1.1. Établir l'expression de la densité volumique de charge $\rho(M)$ entourant une particule en fonction de N_0, e, k_B, V(M) et T.

1.2. Que devient cette expression si $eV(M) \ll k_BT$? On supposera cette approximation vérifiée par la suite.

2. Recherche du potentiel électrostatique

2.1. D'après la description du phénomène et les hypothèses ci-dessus quelles sont la direction et les dépendances du champ $\vec{E}$?
Montrer que le résultat est cohérent avec une dépendance de V en r uniquement : V(M) = V(r).

2.2. En appliquant le théorème de Gauss à deux sphères concentriques voisines, écrire une équation différentielle reliant $r^2E(r)$ à la densité volumique de charge $\rho(r)$.
En déduire que le potentiel vérifie l'équation :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dV}{dr}) + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$$

2.3. Quel résultat du cours retrouve-t-on ?

2.4. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la fonction U(r) = rV(r). On posera $\lambda^2 = \frac{\varepsilon k_B T}{2N_0 e^2}$.

2.5. Résoudre cette équation, puis donner l'expression générale de V(r), en tenant compte des conditions aux limites spatiales, en fonction de r, λ et d'une constante d'intégration A que l'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant (on prendra $\lambda > 0$).

2.6. Quelle est la dimension de λ ? Donner une interprétation physique de cette grandeur. Donner un ordre de grandeur de λ à température ambiante pour de l'eau pure.

On rappelle que $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ F.m^{-1} et $k_B = 1.38\ 10^{-23}$ J.K^{-1}.

3. Le champ électrostatique

3.1. Ecrire le champ électrostatique en un point extérieur à la particule.

3.2. Que serait ce champ si la particule n'était pas entourée d'ions ? En déduire l'expression de la constante A en fonction notamment de r_0 et Q..

3.3. Exprimer alors $\vec{E}(r)$ et V(r).

4. Force d'interaction

4.1. Ecrire l'expression de la force F(d), qui s'exerce entre deux « particules » de colloïde éloignées d'une distance d.

4.2. Ecrire la force F_0, s'exerçant entre ces deux particules sans les ions environnants.

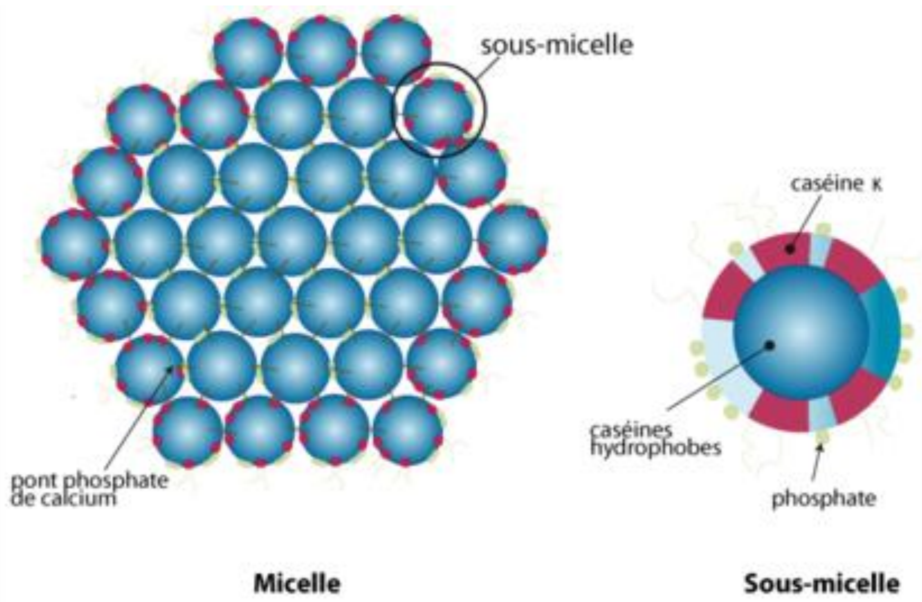
4.3. Exprimer $\dfrac{F(d)}{F_0}$ .Calculer $\dfrac{F(d)}{F_0}$ pour d = 100 r_0 dans l'eau pure, puis dans un électrolyte où $N_0 = 100\ N_{0(\text{eau pure})}$.

5. Document : Coagulation du lait

Le lait est à la fois une solution (lactose, sels minéraux), une suspension (matières azotées) et une émulsion (matières grasses) ; son pH est de l'ordre de 6,8 pour un lait de vache.

Les caséines sont des protéines qui constituent une partie des composants du lait.

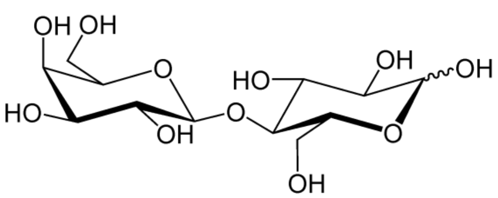
Les différentes caséines sont organisées en micelles qui sont des agrégats de plusieurs molécules de caséine :



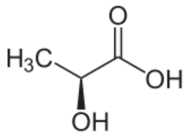
La taille de ces micelles est d'environ 0,1 µm.

Les parties hydrophiles sont constituées notamment d'ions phosphates PO_4^{3-} ($pK_{a,i}$ de l'acide phosphorique : 2 ; 7 ; 12)

Le lait contient d'autre part un glucide, le lactose :



Lors de l'ajout de ferments lactiques (ou bactéries lactiques), le lactose se transforme en acide lactique :



pKa = 4

Lait fermenté

La première phase de la fabrication du fromage et des yaourts est la transformation du lait en lait fermenté. Expliquer grâce aux les résultats des questions 1. à 4. et au texte ci-dessus, en quoi cette fermentation lactique est une coagulation.

Exercice 3 - Résolution de problème : Analogie gravitationnelle

La méthode de Pierre Bouguer (1698-1758) permit l'une des premières vérifications expérimentales de la théorie de Newton. Elle consistait à déterminer la déviation d'un fil à plomb par rapport à la verticale (celle-ci étant repérée d'après l'observation astronomique d'étoiles convenablement choisies) au voisinage d'une montagne.

Cette méthode fut exploitée avec succès par l'astronome royal britannique Nevil Maskelyne, au mont Shiehallion en Écosse en 1774.

Sachant que l'altitude du mont Shiehallion par rapport au niveau du lac (cf. photo) est de 1600 m, que son emprise au sol a un rayon moyen de 1,3 km, que sa densité moyenne vaut 2,7 g.cm^{-3} et que le pendule dévia de θ = 12'' d'arc par rapport à la verticale, déterminer un ***ordre de grandeur*** de la valeur de G.

Une vue du mont Sheihallion