PSI* 2022 - 2023

TD Physique N°7 - Statique et cinématique des fluides

EXERCICE 1 : Expérience des hémisphères de Magdebourg

En 1664 Otto Von Guericke réalisa l'expérience suivante :
Il raccorda deux hémisphères de cuivre de 51 cm de diamètre et ôta l'air contenu à l'intérieur. Il attacha chacun des hémisphères à un attelage de huit chevaux et observa qu'ils n'étaient pas capables de séparer les hémisphères.

- **Gravures d'époque**

- Un cheval-vapeur est défini comme la puissance d'un cheval qui soulèverait à l'aide d'une poulie une charge de 75 kg en parcourant un mètre en une seconde.
- On rappelle que g = 10 m/s^2

Evaluer la pression maximale à l'intérieur des hémisphères.

EXERCICE 2 : Stabilité de l'atmosphère isotherme

La densité de l'air atmosphérique décroît fortement avec l'altitude, ce qui fait que l'essentiel de la masse de l'atmosphère est concentrée dans la troposphère. Dans les questions suivantes, nous étudierons uniquement cette région qui s'étend jusqu'à une dizaine de kilomètres d'altitude. Le champ de pesanteur terrestre y est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ où le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ est orienté selon la verticale ascendante. L'altitude $z = 0$ correspond à la surface des mers et océans. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Données :

1. Rayon terrestre : $R_T = 6{,}40 \times 10^3$ km
2. Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
3. Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
4. Masse molaire du diazote : $M_{N_2} = 28{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
5. Masse molaire du dioxygène : $M_{O_2} = 32{,}0\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
6. Masse molaire de l'air : $M_a = 28{,}8\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$
7. Rapport des capacités thermiques massiques de l'air : $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = 1{,}40$
8. Enthalpie massique de vaporisation de l'eau (supposée indépendante de la température) : $\ell_{vap} = 2{,}25 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

L'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits. On note c_P la capacité thermique massique de l'air à pression constante. On donne l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait en variable (T,P) : $s(T,P) = c_p \ln(T) - R_a \ln(P) + cst$ avec $R_a = \dfrac{R}{M_a}$ (constante massique des gaz parfaits).

On s'intéresse à l'équilibre hydrostatique de l'air dans l'atmosphère terrestre. Les valeurs de référence pour la température et la pression seront prises en $z = 0$ à $P_0 = 1{,}00$ atm $= 1{,}01 \times 10^5$ Pa et $T_0 = 300$ K. On note μ la masse volumique de l'air.

1. En considérant les deux principaux constituants de l'air, calculer la valeur de M_a.
   Montrer que l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $P = \mu R_a T$, où P et T sont la pression et la température absolue du gaz et R_a est la constante précédemment définie. Calculer cette constante en unités SI.
2. Écrire l'équilibre d'un volume infinitésimal d'atmosphère situé entre les altitudes z et $z + dz$. En déduire que le gradient vertical de pression vaut $dP/dz = -\mu g$.
3. Le modèle le plus simple d'atmosphère (*atmosphère isotherme*) consiste à supposer que la température est constante et égale à T_0. En déduire $P(z)$. Définir une longueur caractéristique des variations de la pression et la calculer à 300 K. Donner aussi l'expression de $\mu(z)$.

On propose maintenant d'étudier la stabilité de l'atmosphère isotherme vis-à-vis des mouvements verticaux de l'air. On considère une parcelle d'air en équilibre mécanique et thermique à l'altitude z_0.

Cette parcelle d'air constitue un système fermé. Sa masse, son volume, sa pression, sa température et sa masse volumique sont notées respectivement m_1, V_1, P_1, T_1 et μ_1. On envisage un mouvement vertical de cette parcelle d'air qui la fait passer de l'altitude z_0 à l'altitude $z_0 + \varepsilon(t)$, avec $|\varepsilon(t)| \ll z_0$. On fait l'hypothèse que la pression de la parcelle d'air reste égale à la pression environnante à toute altitude et que, vu la faible conductivité thermique de l'air, l'évolution considérée est adiabatique et réversible. Tous les calculs seront limités au premier ordre en $\varepsilon(t)$.

4. Rappeler, pour un gaz parfait, les capacités thermiques molaires à volume constant C_{vm} et à pression constante C_{pm}, en fonction de leur rapport γ et de R. En déduire l'expression de la capacité thermique massique de l'air c_P à pression constante en fonction de γ et R_a. Faire l'application numérique.
5. Traduire l'hypothèse d'équilibre thermique et mécanique de la parcelle d'air à l'altitude z_0, en considérant ses paramètres intensifs.
6. Exprimer la variation de pression δP_1 de la parcelle d'air lors de son déplacement vertical, en fonction de $\mu(z_0)$, g et $\varepsilon(t)$. Exprimer aussi la variation de masse volumique $\delta\mu$ de l'air environnant en fonction de $\mu(z_0)$, g, R_a, T_0 et $\varepsilon(t)$.
7. Établir la relation liant la variation de volume δV_1 de la parcelle d'air à $P(z_0)$, $V_1(z_0)$, δP_1 et γ. En déduire l'expression de δV_1 en fonction de $V_1(z_0)$, γ, R_a, T_0, g et $\varepsilon(t)$.
8. Donner l'expression de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la parcelle d'air à l'altitude $z_0 + \varepsilon(t)$ (au premier ordre en $\varepsilon(t)$), puis l'expression de la résultante des forces.
9. Écrire l'équation du mouvement vertical de la parcelle d'air et montrer que $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :
   $$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + N^2\varepsilon = 0$$
   où l'on exprimera N en fonction de g, c_P et T_0. Quelle est la dimension de N ? Calculer la valeur numérique de $2\pi/N$.
   L'atmosphère isotherme peut-elle être considérée comme stable ? Le modèle de l'atmosphère isotherme vous semble-t-il réaliste ?

EXERCICE 3 : Cinématique des fluides

- *Champ de vitesse en coordonnées cylindriques :*

  Soit le champ de vitesse, $\vec{v} = v_0(1-\frac{r^2}{a^2})\,\overrightarrow{e_z}$, d'un écoulement dans une conduite cylindrique d'axe z et de rayon a ; v_0 est une constante positive. Calculer le débit volumique de l'écoulement. En déduire sa vitesse moyenne sur cette section. Quelle est la vitesse minimale de cet écoulement ? Sa vitesse maximale ? Que vaut la divergence du champ des vitesses ? Conclusion ?