PSI* 2022 - 2023
TD Physique N°8 - Dynamique des fluides

EXERCICE 1 : Ecoulement de Couette périodique

Une plaque plane de grandes dimensions (nous la supposerons infinie) est placée sur le plan de cote z = 0. La plaque est animée d'un mouvement vibratoire : $\vec{v}_{plaque} = v_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$

Un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η occupe tout l'espace z > 0.

On suppose que, dans le fluide, la pression est déterminée par les lois de l'hydrostatique et que le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = v(x, z, t)\vec{e}_x$

a) Donner les conditions et les justifications permettant d'écrire cette forme de la vitesse et montrer que v n'est pas fonction de x.
b) Ecrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par v(z, t).
c) Déterminer la solution en régime forcé ; on fera apparaître une distance caractéristique δ.

EXERCICE 2 : Ecoulements sous l'effet de la gravité (e3A PSI)

A / Ecoulement de miel sur un plan incliné

Une couche d'épaisseur constante h, d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (Figure 1).

La viscosité cinématique est définie comme le rapport $\nu = \eta/\rho$.

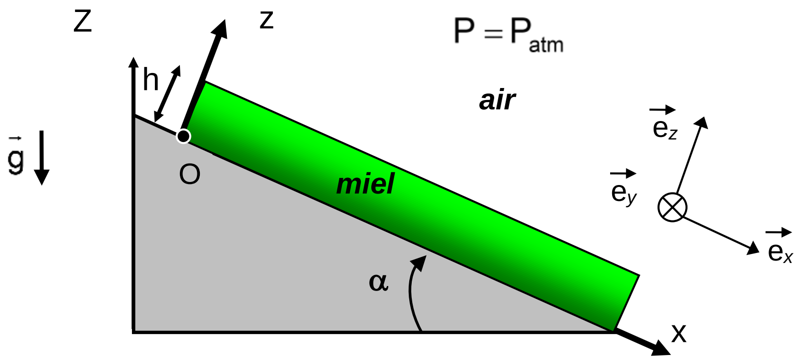


Figure 1

Le support plan incliné a pour équation $z = 0$ et la surface libre correspond à $z = h$. Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. A l'interface air–miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. La dimension du système dans la direction Oy est très supérieure à l'épaisseur h de la couche de miel.

A1. Donner un ordre de grandeur du nombre de Reynolds de cet écoulement. Proposer alors une forme générale pour le champ de vitesse du fluide. On donne, pour le miel, $\eta = 10{,}0$ Pa.s.

A2. Simplifier cette forme pour un écoulement stationnaire de fluide incompressible.

A3. Dans les conditions qui viennent d'être décrites, appliquer la RFD à une particule de fluide…

A4. …et la projeter sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire les expressions des composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,P$ sur cette base.

A5. Justifier que la répartition de pression dans le miel s'écrit $P = P(z)$, puis l'exprimer.

A6. Etablir l'équation différentielle $\dfrac{d^2v(z)}{dz^2} + k\sin\alpha = 0$ vérifiée par la vitesse v(z) et identifier k.

A7. Ecrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse v en $z = 0$ et à sa dérivée $\dfrac{dv(z)}{dz}$ en $z = h$.

A8. Résoudre l'équation différentielle et montrer que le profil de vitesse dans la couche de miel vérifie la relation : $v(z) = \beta\, z(2h - z)$. Identifier β.

Localiser le point où cette vitesse est maximale et préciser l'expression correspondante de la vitesse v_{MAX}. Calculer v_{MAX} sachant que $h = 3{,}0\text{ mm}$, $\alpha = 10°$, $g = 10\text{ m.s}^{-2}$ et que, pour le miel, $\rho = 1{,}4.10^3\text{ kg.m}^{-3}$.

A9. Représenter le profil des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique (figure 1).

La couche de miel possède une largeur W (selon Oy) qui demeure très grande par rapport à l'épaisseur h.

A10. Exprimer le débit volumique Q_V du miel. En déduire la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ de l'écoulement et l'exprimer en fonction de v_{MAX}.

A11. Proposer, en la justifiant, une expression du nombre de REYNOLDS comme le rapport de deux termes énergétiques. En déduire son expression littérale puis sa valeur numérique. Conclure.

B / DYNAMIQUE D'UN GLACIER

Les mouvements d'un glacier peuvent être modélisés par l'écoulement d'un fluide newtonien extrêmement visqueux. Afin d'adopter une géométrie simple, la vallée glaciaire est assimilée à une canalisation de section rectangulaire en forme de U dont le fond est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Figure 2). La masse de glace occupant cette vallée possède une largeur moyenne a et une épaisseur moyenne h, avec $a = 2h$.

Compte tenu de la géométrie proposée, la nouvelle répartition de la vitesse dans les couches du glacier s'écrit : $\vec{v}(M) = v(y,z)\,\vec{e}_x$.

B1. Etablir, en généralisant les résultats obtenus dans l'étude précédente (A), l'équation différentielle décrivant l'écoulement du glacier en régime permanent.

Afin de simplifier la description de cet écoulement, réalisons les changements de variables suivants : $y = y'\,a$, $z = z'\,a$. Les grandeurs y' et z' sont adimensionnées.

B2. Transformer l'équation différentielle précédente en introduisant une vitesse caractéristique v_0, et en posant $v = v' v_0$, de façon à obtenir une équation différentielle adimensionnée en $v'(y',z')$, pouvant s'écrire : $\dfrac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \dfrac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$. Expliciter v_0.

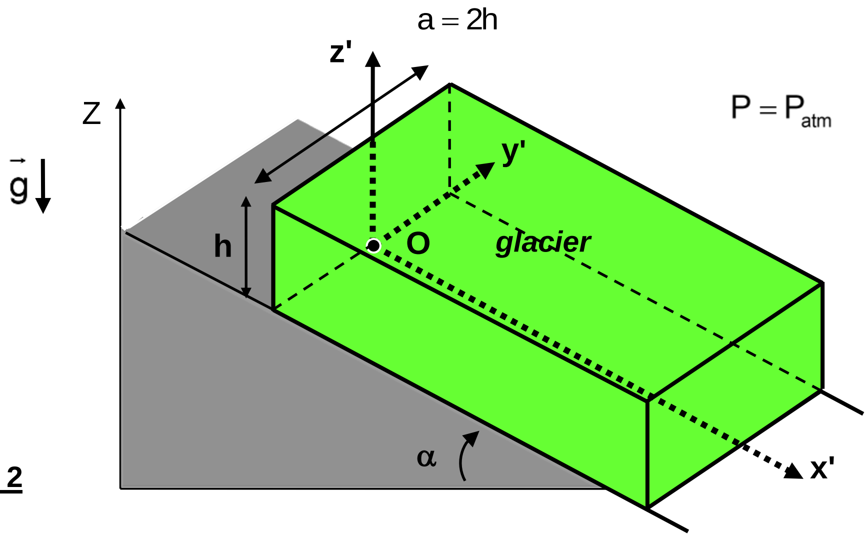


Figure 2

B3. Préciser les conditions aux limites vérifiées par la solution $v'(y',z')$, en $z' = 0$ et $y' = \pm 1/2$, puis par sa dérivée $\dfrac{dv'}{dz'}$, en $z' = 1/2$.

La résolution informatique de cette équation différentielle permet d'obtenir le tracé de v' en fonction de y' (Figure 3) pour différentes valeurs du paramètre z' (compris entre 0 et 1/2).

B4. Evaluer la valeur maximale v'_{MAX} atteinte par la vitesse adimensionnée v' à la surface supérieure du glacier.

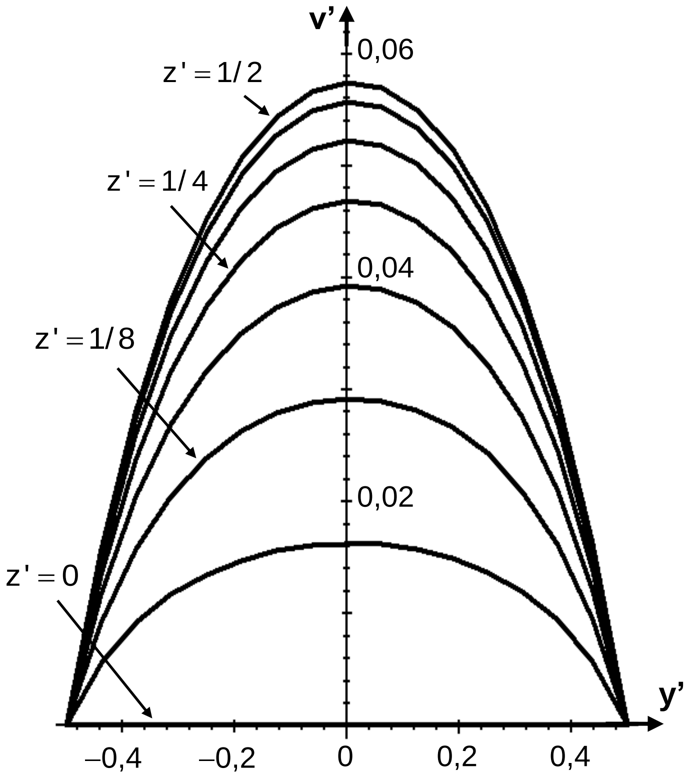


Figure 3

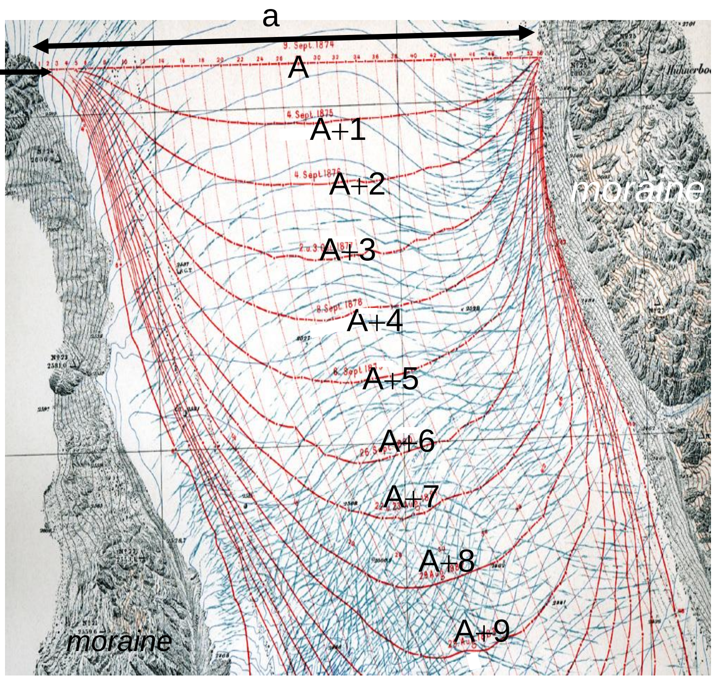
Etablie pour le glacier du Rhône près du col de la Furka dans le Valais suisse, la *__figure 4__* *présente, en superposition à une carte IGN, l'évolution d'une ligne d'environ 50 balises au cours d'une décennie (années référencées A, A+1, … , A+9). A l'instant de référence (année A), les balises sont alignées sur la largeur a du glacier, entre deux moraines latérales.*

__B5.__ Estimer le déplacement de la balise centrale sur la durée de 9 années. Calculer la vitesse moyenne de déplacement en $m.an^{-1}$, puis en $m.s^{-1}$.
En déduire la valeur de la vitesse caractéristique v_0.

__B6.__ Déterminer, puis calculer, la viscosité cinématique de la glace. Commenter.

Alignement des balises (année A de référence)

__Figure 4__



Ecoulement du glacier du Rhône

__Données__ : $a = 2h = 800\ m$ *, angle moyen* $\alpha = 14°$ *et* $g = 10\ m.s^{-2}$ *.*