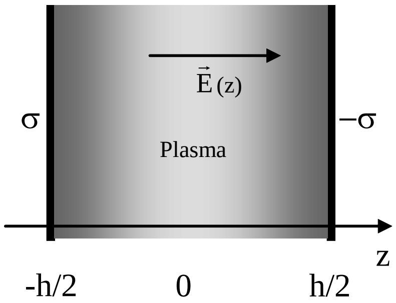
PSI* 2020 – 2021
TD N°8 – EM(2)

EXERCICE 1 : Effet d'écran dans un plasma

On considère un milieu ionisé (appelé plasma), constitué de particules de charges + q et – q, de densités particulaires identiques au repos égales à n_0, uniforme et indépendant du temps.
Ce plasma occupe tout le domaine compris entre deux plans parallèles de cotes – h/2 et + h/2.
On charge uniformément ces deux plans (avec des densités surfaciques respectives + σ et – σ, cf. schéma) . La répartition des charges dans le plasma est alors modifiée.



Le système est supposé unidimensionnel : toutes les grandeurs ne dépendent que de la coordonnée z et le champ électrique recherché est de la forme : $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$.
Les densités de particules, notées respectivement $n^+(z)$ et $n^-(z)$ sont données par la loi de Boltzmann de l'équilibre thermodynamique (statistique) du système à la température T :
La probabilité $d\mathcal{P}$ de trouver une charge dans un volume $d\tau$ situé autour d'un point où le potentiel est V(z), est proportionnelle à $e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$, où E_P est l'énergie potentielle d'interaction entre le champ et les charges.

1) Donner l'expression de E_0 valeur du champ électrique entre les plaques + σ et – σ en l'absence de plasma.

2) Justifier la forme proposée pour le champ électrique en présence de plasma et des plans chargés.

3) Etablir la relation différentielle liant $\rho(z)$ et E(z). En déduire celle qui relie $\rho(z)$ et V(z).

4) La référence des potentiels est choisie de façon que V = 0 si $n^+ = n^- = n_0$: le potentiel nul (ou l'énergie potentielle nulle) correspond donc au plasma non perturbé par un champ.
   Exprimer $n^+(z)$, $n^-(z)$ et $\rho(z)$ en fonction du potentiel, puis établir l'équation différentielle vérifiée par V(z).

5) Linéariser celle-ci pour qV << kT et la résoudre. Pour déterminer la constante d'intégration, on montrera que le champ créé par le plasma est nul sur les plans z = $\pm$ h.

6) Justifier le nom : « effet d'écran » du titre de l'exercice.

EXERCICE 2 : Hexapôle électrostatique

On étudie la possibilité de guider le mouvement de molécules polaires avec un système électrostatique formé de six électrodes cylindriques et parallèles $\{Ci,\ i = 1, 2, \dots 6\}$ disposées aux sommets d'un hexagone régulier auquel elles sont orthogonales (figure 1).

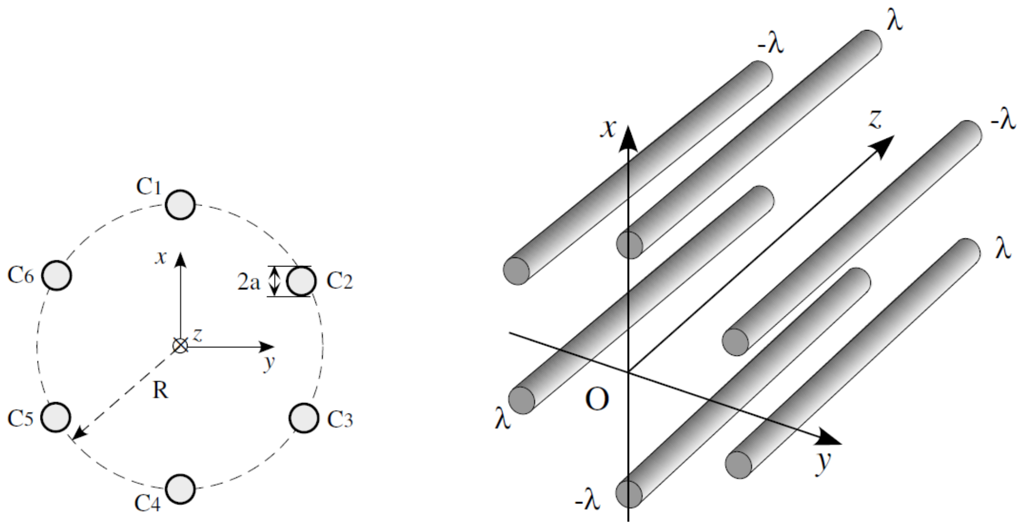


Figure 1

Leur rayon a est très inférieur au côté R de l'hexagone, $a \ll R$. Elles portent des densités linéiques de charge égales alternativement à $\lambda(\lambda > 0)$ pour les électrodes impaires et $-\lambda$ pour les paires ; on considèrera que ces charges sont fixes et uniformément réparties à leur surface. On négligera les effets d'extrémités, l'ensemble pouvant être considéré comme invariant par translation selon l'axe central Oz du système. On utilisera un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec comme repère orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Analyse des symétries

a) Quelles conclusions sur le champ $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V tire-t-on de l'invariance par translation du système ?

b) Considérer la symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe. Quelle propriété du champ électrique $\vec{E}$ en déduit-on ?

c) Même question pour l'un des trois plans passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées.

d) Montrer que les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont équipotentiels.

e) Quelle est la période angulaire d'invariance du système par rotation autour de l'axe Oz ? En déduire une expression générale du potentiel $V(r, \theta, z)$ sous forme d'une série de Fourier.

2. Soit une électrode de densité linéique de charge λ. Déterminer le champ électrostatique créé par cette électrode en un point P à l'aide de la distance D de ce point à son axe ($D > a$). En déduire une expression du potentiel électrostatique correspondant.

3. On considère maintenant l'ensemble des électrodes du système. Montrer que, en le choisissant nul sur l'axe central, le potentiel électrostatique en un point P est donné par l'expression :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right)$$

où D_i désigne la distance de P à l'axe de l'électrode Ci.

Pour expliciter le potentiel en fonction des coordonnées de P, il est commode de considérer le plan xOy comme plan de représentation des nombres complexes. Le point P y est repéré par $\underline{Z} = x + iy = r\exp(i\theta)$, les axes des électrodes impaires le sont par (R, jR, j^2R) et ceux des électrodes paires par $(-R, -jR, -j^2R)$, avec $j = \exp(i2\pi/3)$ racine cubique de l'unité.

On peut montrer que :
(le faire à titre d'exercice)

$$\frac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5} = \left|\frac{R^3 + \underline{Z}^3}{R^3 - \underline{Z}^3}\right| .$$

5. On s'intéresse à la partie centrale $r \ll R$. Montrer que le potentiel électrostatique y est donné par $V(r, \theta, z) \simeq \dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 \cos(3\theta)$. Cette expression respecte-t-elle les symétries étudiées en question **1.** ?

6. Déterminer les potentiels V_0 des électrodes impaires dans l'hypothèse $a \ll R$ en fonction de R, a et λ. Quel est celui des électrodes paires ?

7. On considère le système comme un condensateur, les trois électrodes impaires formant l'une des armatures, les trois paires l'autre. Déterminer la capacité par unité de longueur correspondante C.

Montrer que le potentiel électrostatique dans la partie centrale de l'hexapôle s'exprime simplement en fonction de cette capacité linéique et de la tension V_0.

8. *Application numérique.* Calculer la capacité électrostatique par unité de longueur d'un hexapôle ayant $R = 2.5$ cm et $a = 2.5$ mm.