ψ^* 2017 : TD des 18 et 20 septembre (semaine 3)

Espaces vectoriels normés

1. Equivalence des normes usuelles sur $E = M_n(\mathbb{R})$.
   a. Trouver $\alpha > 0$ vérifiant :
   $$\forall A \in E\ ,\ \|A\|_2 \leq \alpha \|A\|_\infty$$
   b. Trouver $\beta > 0$ vérifiant :
   $$\forall A \in E\ ,\ \|A\|_\infty \leq \beta \, |||A|||$$
   c. Trouver $\gamma > 0$ vérifiant :
   $$\forall A \in E\ ,\ |||A||| \leq \gamma \|A\|_2$$
   d. Trouver α', β', γ' vérifiant les inégalités inverses dans les propriétés précédentes.

2. Non équivalence des normes usuelles sur $E = C^0([a,b])$.
   a. Existe-t-il $\alpha > 0$ vérifiant :
   $$\forall f \in E\ ,\ \|f\|_1 \leq \alpha \|f\|_2$$
   b. Existe-t-il $\beta > 0$ vérifiant :
   $$\forall f \in E\ ,\ \|f\|_2 \leq \beta \|f\|_\infty$$
   c. Existe-t-il $\gamma > 0$ vérifiant :
   $$\forall A \in E\ ,\ \|f\|_\infty \leq \gamma \|f\|_1$$

3. Sur $E = C^1([a,b])$ on définit $\|.\| : f \mapsto |f(a)| + \|f'\|_\infty$.
   a. Justifier que c'est bien une norme.
   b. Trouver une inégalité entre $\|.\|_\infty$ et $\|.\|$.
   Que peut-on en déduire concernant les parties bornées relativement à ces deux normes ?
   Même question pour la convergence des suites relativement à ces deux normes.
   c. Construire une suite dans E qui est convergente pour $\|.\|_\infty$ mais pas pour $\|.\|$.

4. Soit $(E, \|.\|)$ un evn, B une partie non vide de E, a un élément de E.
   La **distance de** a **à** B est $d(a,B) =_{déf} \inf \{ \, d(a,x) \mid x \in B \, \}$.
   a. Justifier son existence.
   b. Calculer $d(a,B)$ dans le cas où B est la boule fermée de centre b et rayon r .
   c. Calculer $d(a,B)$ dans le cas où B est la boule ouverte de centre b et rayon r .

Suites vectorielles

1. Théorème de Cesaro.
   Soit u une suite dans un ev E. On lui associe la suite v définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
   Prouver que si u converge vers l, alors il en est de même pour v. On commencera par le cas $l = 0_E$.